

VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta strojní
Institut dopravy

Optimalizace tras pro svoz komunálního odpadu

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Student:	Milan Sobek
Vedoucí bakalářské práce:	Ing. Mgr. Petr Kozel, Ph.D.

Ostrava 2018

VŠB – Technical University of Ostrava
Faculty of Mechanical Engineering
Institute of Transport

Municipal Waste Collection Routes Optimization

BACHELOR THESIS

Student:
Supervisor:

Milan Sobek
Ing. Mgr. Petr Kozel, Ph.D.

Ostrava 2018

Zadání bakalářské práce

Student: **Milan Sobek**
Studijní program: B2341 Strojírenství
Studijní obor: 2301R003 Dopravní technika a technologie
Téma: **Optimalizace tras pro svoz komunálního odpadu**
Municipal Waste Collection Routes Optimization
Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

1. Úvod.
2. Charakteristika problému.
3. Teoretická východiska řešení.
4. Tvorba optimalizačního modelu.
5. Výpočetní experimenty.
6. Interpretace výsledků a zhodnocení efektivity navržených tras.
7. Závěr.

Cíl práce: Na zadané dopravní síti navrhnout trasy obslužných vozidel zabezpečujících svoz komunálního odpadu tak, aby byla minimalizována ujetá obslužná vzdálenost.

Seznam doporučené odborné literatury:

Janáček, J. *Matematické programování*. Žilina: EDIS, 2003. ISBN 80-8070-054-0.
Janáček, J. *Optimalizace na dopravních sítích*. Žilina: EDIS, 2002. ISBN 80-8070-586-0.
Palúch S., Peško, Š. *Kvantitativne metody v logistike*. Žilina: EDIS, 2006, ISBN 80-8070-636-0.
Saha Ray, S. *Graph theory with algorithms and its applications: in applied science and technology*. New York: Springer, 2013. ISBN 978-81-322-0749-8.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Mgr. Petr Kozel, Ph.D.**

Datum zadání: 08.12.2017

Datum odevzdání: 21.05.2018



doc. Ing. Aleš Slíva, Ph.D.
vedoucí katedry



doc. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Výsledky předložené diplomové práce jsou začleněny do širšího projektu TAČR TH02010930 „*RETIA - Efektivní přístupy k úsporným a adaptabilním systémům údržby a obsluhy dopravních sítí*“, který je řešen na Ekonomické fakultě Vysoké školy báňské – Technické univerzity v Ostravě.

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě :

.....

podpis studenta

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- беру на вѣдомі, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že bakalářská práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího bakalářské práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- беру на вѣдомі, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě : 21. 5. 2018

.....

podpis

Jméno a příjmení autora práce:

Milan Sobek

Adresa trvalého pobytu autora práce:

Dobruška 317

ANOTACE BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

SOBEK, M. *Optimalizace tras pro svoz komunálního odpadu: bakalářská práce*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Institut dopravy, 2018, 60 s. Vedoucí práce: Ing. Mgr. Petr Kozel, Ph.D.

Bakalářská práce se zabývá optimalizací tras pro svoz komunálního odpadu v městě Olomouci. Předmětem řešení předložené práce je naplánovat na zadané dopravní síti optimální trasu obslužného vozidla tak, aby byla minimalizována celková vzdálenost, kterou je nutné při obsluze ujet. Práce vychází z teoretických poznatků z oblasti operačního výzkumu, především pak z matematického programování a teorie grafů. Funkčnost navržených matematických modelů je ověřena na množině netriviálních úloh, prostřednictvím výpočetních experimentů v prostředí Xpress-IVE. V práci jsou dále realizovány výpočetní experimenty na reálných datech, jejichž výstupem je návrh optimální trasy obslužného vozidla zabezpečujícího svoz separovaného odpadu.

ANNOTATION OF BACHELOR THESIS

SOBEK, M. *Municipal Waste Collection Routes Optimization: Bachelor Thesis*. Ostrava: VSB - Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, The Institute of Transport, 2018, 60 p. Thesis head: Ing. Mgr. Petr Kozel, Ph.D.

The aim of this thesis is optimize route for waste collection in the Olomouc municipality. The main goal of this thesis is to prepare a suitable route which will decrease total distance in order to keep service operational and effective. The thesis is based on the theoretical knowledge from the fields of operational research, with a focus to mathematical programming and graph theory. The functionality of proposed mathematical models are verified on a set of non-trivial tasks, through computational experiments in the Xpress-IVE environment. In this thesis I performed real computational experiments. Resolute of my findings is to provided the best possible route for the vehicles providing collection of separate waste.

OBSAH

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ.....	8
SEZNAM OBRÁZKŮ	9
SEZNAM TABULEK.....	10
ÚVOD.....	11
1 CHARAKTERISTIKA PROBLÉMU	13
1.1 Klasifikace základních disciplín operačního výzkumu.....	14
2 TEORIE GRAFŮ.....	15
2.1 Základní pojmy	16
2.2 Reprezentace grafů.....	17
2.2.1 Diagram grafu	18
2.2.2 Množinový zápis grafu	19
2.2.3 Matice přilehlosti	20
2.2.4 Matice ohodnocení hran.....	21
2.3 Cesty v grafech.....	22
2.3.1 Základní pojmy pro cesty v grafech	23
2.3.2 Souvislost grafů a digrafů	24
2.3.3 Výpočet vzdáleností v dopravní síti.....	25
3 MATEMATICKÉ PROGRAMOVÁNÍ	30
3.1 Lineární programování.....	31
3.2 Výpočetní nástroj	33
3.3 Postup při modelování.....	33
4 TVORBA OPTIMALIZAČNÍHO MODELU	34
4.1 Formulace problému	34
4.1.1 Jednosměrné pozemní komunikace	43
4.2 Verifikace a validace matematických modelů	43
5 NUMERICKÉ EXPERIMENTY NA REÁLNÝCH DATECH	48
5.1 Příprava vstupních dat.....	49
5.2 Interpretace a zhodnocení dosažených výsledků	52
ZÁVĚR	55
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	58
SEZNAM PŘÍLOH.....	60

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

a.s.	Akciová společnost
NG	Náhodný graf
svg	Škálovatelná vektorová grafika (Scalable Vector Graphics)
txt	Textový soubor
\mathbb{R}	Množina reálných čísel

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 2.1: Diagram grafu $G_1 = (V_1, H_1)$

Obrázek 2.2: Diagram hranově ohodnoceného grafu $G_2 = (V_2, H_2, c_2)$

Obrázek 2.3: Diagram digrafu $\overrightarrow{G}_3 = (V_3, H_3)$

Obrázek 2.4: Diagram hranově ohodnoceného digrafu $\overrightarrow{G}_4 = (V_4, H_4, c_4)$

Obrázek 2.5: Zachycení přímé a nepřímé vzdálenosti mezi vrcholy i a j

Obrázek 2.6: Hranově ohodnocený graf G

Obrázek 4.1: Hranově ohodnocený graf pro příklad 4.1

Obrázek 4.2: Diagram úplného grafu G_1

Obrázek 4.3: Doplnění hran do grafu G

Obrázek 4.4: Výsledný tah v grafu G , pro postup řešení Edmondsovým algoritmem

Obrázek 4.5: Výsledný tah v grafu G , pro variantu využívající matematického modelu pro určení počtu průjezdů jednotlivými hranami

Obrázek 4.6: Diagram grafu odpovídající zápisu v textovém souboru

Obrázek 5.1: Vzorové schéma ulic pro první situaci

Obrázek 5.2: Vzorové schéma ulic pro druhou situaci

Obrázek 5.3: Graf závislosti velikosti gapu na čase

Obrázek 5.4: Graf závislosti velikosti gapu po uplynutí 90. sekundy výpočtu

SEZNAM TABULEK

Tabulka 2.1: Matice přilehlosti grafu G_1

Tabulka 2.2: Matice přilehlosti digrafu $\overrightarrow{U_3}$

Tabulka 2.3: Matice ohodnocení hran grafu G_2

Tabulka 2.4: Matice ohodnocení hran digrafu $\overrightarrow{U_4}$

Tabulka 2.5: Matice ohodnocení hran pro příklad č. 2.1

Tabulka 2.6: Hodnoty vypočtené v kroku pro $k=1$

Tabulka 2.7: Hodnoty vypočtené v kroku pro $k=2$

Tabulka 2.8: Hodnoty vypočtené v kroku pro $k=3$

Tabulka 2.9: Hodnoty vypočtené v kroku pro $k=4$

Tabulka 4.1: Výchozí matice ohodnocení hran pro příklad 4.1

Tabulka 4.2: Stupně vrcholů pro výchozí graf k příkladu 4.1

Tabulka 4.3: Matice vzdáleností d_{ij} se zavedením prohibitivních konstant

Tabulka 4.4: Stupně vrcholů po doplnění nových hran

Tabulka 4.5: Výstup z matematického modelu pro vzorový příklad č. 4.1

Tabulka 4.6: Výsledné hodnoty výpočetních experimentů

Tabulka 5.1: Ukázka vstupních dat z Olomouce

Tabulka 5.2: Ukázka dat obsahující duplicitní adresy a čísla popisná

Tabulka 5.3: Data po odstranění duplicitních adres a čísel popisných z tabulky č. 5.2

Tabulka 5.4: Vstupní data pro reálnou úlohu

ÚVOD

Svoz odpadu a nakládání s ním je nezbytnou skutečností našeho každodenního života. Bez fungování této služby si snad ani nedokážeme život v dnešní společnosti představit. V minulosti se společnost problematice hospodaření s odpadem příliš nevěnovala. Hlavním důvodem byla skutečnost, že její lidé neprodukovali v takovém množství, aby výrazněji ovlivňoval jejich životní prostor.

Nutnost řešit problematiku odpadu nastala v okamžiku, kdy se lidé začali shlukovat do měst a sídlišť. Mnohá tehdejší Řecká a Římská města byla v nakládání s odpadem velmi pokroková. Odpadky byly shromažďovány a vyváženy za městské hradby. I v dnešní době jsou stále nalézány pozůstatky těchto starověkých skládek. Nejčastěji se jedná o skládky amfor, což byly nádoby určené pro dovážení potravin.

Období středověku, především pak v Evropě, bylo pověstné velkým znečištěním měst a zanedbáváním hygienických norem. Lidé hromadili odpady téměř u svých obydlí, nepoužívali kanalizaci, nebo také pohřbívali zemřelé v blízkosti svých významných vodních zdrojů. Takováto sídliště byla poté zdrojem nebezpečných nákaz a epidemií, která sužovala tehdejší populaci. Řešení přineslo až období Osvícenství. Takzvaní osvícenští panovníci se rozhodli zamořená města změnit k lepšímu a pozvednout tak životní úroveň. Jejich největším přínosem bylo vybudování kanalizace, nebo také vydláždění ulic.

Skutečný pokrok v nakládání s odpadem přišel až s Pasteurovými objevy v oblasti mikrobiologie ve druhé polovině 19. století. Odpadky vymizely z městských ulic a byly ukládány do nádob, které byly poté formanskými vozy vyváženy za městské hradby na první improvizované skládky. V Praze existuje nádobový systém ukládání odpadků od roku 1923. Řízené skládky a spalovny se začaly objevovat v druhé polovině 20. století.

Důležitou skutečností v nakládání s odpadem spočívá v jeho třídění a recyklaci. V 50. letech 20. století se objevily první názory, že tehdejší vývoj v produkci odpadu je do konce 21. století neudržitelný a tyto teorie byly potvrzeny počítačovým modelem z Massachusetts Institute of Technology publikovaném v roce 1972. Vznikl tak nový pojem „Trvale udržitelný rozvoj“, jehož cílem bylo zlepšit hospodaření s přírodními zdroji a ochránit životní prostředí.

Období na přelomu 20. a 21. století v ČR přineslo obrovský nárůst produkce odpadů. Skladování odpadů se již nejeví jako vhodné řešení a do popředí se dostává především

recyklace a třídění odpadů. Za tímto účelem jsou hledány nové možnosti pro zlepšení zpracování a nakládání s odpadem (Historie nakládání s odpady).

Podle Českého statistického úřadu vyprodukujeme v České republice zhruba 300 kilogramů odpadu na osobu ročně. Podobné studie však uvádějí produkci komunálního odpadu v ČR až 500 kilogramů na osobu ročně (Čsú, 2006).

Z toho, co bylo právě řečeno je zřejmé, že problematice hospodaření s odpadem je žádoucí věnovat náležitou pozornost a je stále nutné hledat odpovědi na množství otázek a hledat také nová řešení pro budoucí generace. Jednu kategorii otázek tvoří problematika týkající se svozu a přepravy odpadu samotných. V této souvislosti je často diskutovanou otázkou: *Jak optimálně plánovat trasy obslužných vozidel, které svoz komunálního odpadu zabezpečují?*

Předložená bakalářská práce je věnovaná právě zmíněné problematice. V rámci jednotlivých kapitol předložené práce bude pozornost zaměřena na optimalizaci tras pro svoz komunálního odpadu s využitím vhodných nástrojů pro podporu rozhodování z operačního výzkumu. Těmito nástroji jsou především teorie grafů a matematické programování.

1 CHARAKTERISTIKA PROBLÉMU

Jak již bylo v úvodu zmíněno, předložená bakalářská práce je zaměřena na optimalizaci tras pro svoz komunálního odpadu s využitím vhodných nástrojů pro podporu rozhodování z operačního výzkumu. Konkrétně se bude jednat o svoz separovaného odpadu v podmínkách Technických služeb města Olomouce, a.s., které zabezpečují hospodaření s odpadem ve městě Olomouci.

Předmětem řešení bude návrh tras obslužných vozidel, které samotný svoz odpadů zabezpečují. Podrobná specifikace konkrétního problému bude uvedena v samostatné kapitole, věnované numerickým experimentům s reálnými daty. V této chvíli bude pozornost přesunuta k teoretickým podkladům, ze kterých bude v předložené bakalářské práci vycházeno. Jedná se o oblast operačního výzkumu obsahující především teorii grafů a matematické programování.

Operační výzkum je možné definovat jako vědní disciplínu, respektive soubor samostatných vědních disciplín, uplatňujících se při analýze a zkoumání operací v rámci jednoho uceleného systému. Výstupem operačního výzkumu bývají závěry a doporučení, umožňující zefektivnit fungování zkoumaných operací a tím zlepšit chod celého systému. Jedná se tedy o prostředek pro nalezení optimálního řešení daného problému s ohledem na omezující podmínky, které mají na systém vliv (Jablonský, 2007, Dudorkin, 1988).

Z historického hlediska nelze vznik operačního výzkumu přesně zařadit. Jeho počátky se proto datují přibližně do první poloviny 20. století a je spojen s osobnostmi A. Markovem¹, G. B. Dantzigem², L. Kantorovičem³, a dalšími. Zpočátku se operační výzkum využíval především pro vojenské účely. V poválečném období dochází ke zdokonalování výpočetní techniky, které dále rozšířilo možnosti uplatnění metod operačního výzkumu (Jablonský, 2007, Dudorkin, 1988).

¹ Andrej Andrejevič Markov (1856 - 1922), ruský matematik, zakladatel teorie stochastických (náhodných) procesů, později nazývány Markovými řetězci.

² George Danzig (1914 - 2005), americký matematik a profesor operační analýzy a informatiky na Stanfordově univerzitě. Tvůrce simplexového algoritmu pro řešení úloh lineárního programování.

³ Leonid Kantorovič (1912 - 1986), ruský matematik a ekonom, držitel Nobelovy ceny za ekonomii (1975), tvůrce lineárního programování.

1.1 Klasifikace základních disciplín operačního výzkumu

Operační výzkum se obvykle dělí do několika základních disciplín. Jedná se zejména o tyto disciplíny: matematické programování, vícekriteriální rozhodování, teorie grafů, teorie hromadné obsluhy, teorie obnovy, teorie her a další. Jednotlivé, výše uvedené disciplíny nyní budou krátce představeny.

Matematické programování

Prvním odvětvím operačního výzkumu je matematické programování, které se zabývá řešením optimalizačních úloh. Základním nástrojem je matematický model rozhodnutí. Pomocí optimalizačního kritéria je posuzována kvalita jednotlivých řešení, často vyjádřených jako účelová funkce. Cílem je nalézt optimální řešení, tedy přípustné řešení, pro něž nabývá optimalizační kritérium extrému, přičemž přípustné řešení je pak takové řešení, které vyhovuje všem omezujícím podmínkám optimalizační úlohy. Matematické programování lze blíže specifikovat z hlediska matematického popisu na lineární a nelineární programování.

Matematické programování je stěžejním teoretickým východiskem a jeho detailnímu představení bude v dalším textu věnována náležitá pozornost.

Teorie grafů

Druhým důležitým odvětvím operačního výzkumu je teorie grafů. Základním objektem teorie grafů je graf, který je tvořen vrcholy a hranami. Vrcholy modelují důležitá místa v dopravní síti, například depa, zastávky, kontejnery a podobně. Hrany poté znázorňují spojnice mezi nimi, například pozemní komunikace. Prostřednictvím grafů je možné velmi efektivně znázorňovat reálné systémy.

Podobně jako matematickému programování, bude i teorii grafů věnována zvláštní pozornost v samostatné kapitole.

Vícekriteriální rozhodování

Třetí ze základních disciplín operačního výzkumu je vícekriteriální rozhodování. Soustředí se na analýzu rozhodovacích úloh, ve kterých je množina variant posuzována podle několika hodnotících kritérií najednou. Podstatnou skutečností je, že hodnotící kritéria nebývají ve vzájemné shodě a výsledkem analýzy je tedy nalezení řešení konfliktu mezi navzájem protikladnými kritérii (Jablonský, 2007).

Teorie hromadné obsluhy

Teorie hromadné obsluhy je čtvrtá, velmi rozsáhlá oblast operačního výzkumu. Zabývá se tvorbou matematických modelů, takzvaných obslužných systémů (systémů hromadné obsluhy) a jejich řešením. Systém hromadné obsluhy je každý systém, do kterého vstupují zákazníci za účelem obsluhy. Teorie hromadné obsluhy je postavena na matematické teorii pravděpodobnosti. Ve skutečném světě je systém hromadné obsluhy možné pozorovat například při průjezdu křižovatkou, při odbavování na letištích, při obsluze na poště a v mnoha dalších případech.

Teorie obnovy

Pátou disciplínou operačního výzkumu je teorie obnovy, která je zaměřena na spolehlivost jednotlivých součástí systému, a spolehlivost systému jako celku. Doba bezporuchového provozu jednotek je dána jako náhodná veličina. Cílem teorie obnovy je odhadovat střední dobu fungování jednotek a předpovídat selhání v závislosti na jejich stáří. (Jablonský, 2007).

Teorie her

Poslední ze základních odvětví operačního výzkumu je teorie her. Základním předpokladem teorie her je, že sérii rozhodovacích situací s více než jedním účastníkem si lze představit jako hru, kde každý z účastníků hry má svou vlastní výherní strategii. Cílem teorie her je v tomto případě nalezení optimální strategie v dané rozhodovací situaci (Jablonský, 2007).

Nyní byly stručně představeny základní oblasti operačního výzkumu. Je vhodné uvést, že existují samozřejmě další relativně samostatné disciplíny operačního výzkumu a to sice: teorie zásob, simulace, a další. Z hlediska zaměření této práce se jimi však nebudeme dále zabývat a pozornost bude naopak zaměřena, jak již bylo avizováno, na dvě vybrané oblasti. Těmito oblastmi jsou *teorie grafů* a *matematické programování*.

2 TEORIE GRAFŮ

V předcházející kapitole byly stručně představeny všechny základní oblasti operačního výzkumu. Právě započatá kapitola je věnována podrobnému představení první ze dvou již zmiňovaných oblastí operačního výzkumu, které jsou pro řešení práce významné, a tou je teorie grafů.

Počátky teorie grafů spadají již do 18. století a bývají spojovány s reálnou úlohou, která se týkala nalezení cesty přes sedm mostů v městě Královec⁴. Lidé žijící v tomto městě si kladli otázku, zdali je možné přejít celé město tak, aby prošli přes všech sedm mostů právě jednou a vrátili se zpět do místa odkud vyšli. Řešení této hádanky objevil švýcarský matematik Leonhard Euler, který dokázal, že taková procházka je nemožná. Euler si znázornil mosty a jednotlivé oblasti města rozdělené řekou pomocí jednoduchého grafu. Části města tvořily vrcholy grafu a mosty byly jejich spojnici, tedy hranami. Dokázal, že takový graf nesplňuje podmínky existence uzavřeného tahu.

Eulerovo zjednodušené zakreslení mostní sítě, zanedbávající mnoho faktorů jako délky cest nebo přesné polohy bodů, položilo základ této matematické disciplíny. Teorie grafů je dnes využívána v nespočetném množství oborů, od výzkumu dopravní infrastruktury, až po internetové sociální sítě (Cook, 2012, Pickover, 2012).

2.1 Základní pojmy

Po stručném náhledu do historie budou v následujícím textu představeny vybrané základní pojmy z oblasti teorie grafů, které budou používány v dalších částech práce a na které bude průběžně odkazováno. Vzhledem k tomu, že základní pojmy teorie grafů jsou obecně používány v řadě odborných publikací, nebudou zde definice citovány jednotlivě, ale pouze souhrnně. Základními teoretickými zdroji jsou: (Murty, 2008, Palúch, 2008)

Definice 2.1 Graf

Graf je uspořádaná dvojice $G = (V, H)$, kde V je neprázdňá konečná množina vrcholů a H je množina neuspořádaných dvojic typu $\{u, v\}$ takových, že $u \in V$, $v \in V$ a $u \neq v$. Prvky množiny V nazýváme vrcholy a prvky množiny H nazýváme hranami grafu G .

Definice 2.2 Digraf

Digraf je uspořádaná dvojice $\vec{G} = (V, H)$, kde V je neprázdňá konečná množina a H je množina uspořádaných dvojic typu (u, v) takových, že $u \in V$, $v \in V$ a $u \neq v$. Prvky množiny V nazýváme vrcholy a prvky množiny H nazýváme orientovanými hranami digrafu \vec{G} .

⁴ Královec, dřívější město v Prusku, dnes Kaliningrad v Rusku.

Definice 2.3 Úplný graf

Graf $G = (V, H)$ je úplným grafem, pokud množina H obsahuje všechny možné dvojice typu $\{u, v\}$ kde $u, v \in V$ a $u \neq v$. Úplný graf o n vrcholech je označován symbolem K_n .

Definice 2.4 Úplný digraf

Digraf $\vec{G} = (V, H)$ je úplným digrafem, pokud množina H obsahuje všechny možné dvojice typu (u, v) , kde $u, v \in V$ a $u \neq v$.

Definice 2.5 Stupeň vrcholu grafu

Stupeň $\deg(v)$ vrcholu v v grafu $G = (V, H)$, je počet hran incidujících s vrcholem v .

Definice 2.6 Hranově ohodnocený graf (digraf)

Graf $G = (V, H)$, resp. digraf $\vec{G} = (V, H)$ je hranově ohodnoceným, pokud každé hraně, resp. orientované hraně $h \in H$ je přiřazeno reálné číslo $c(h)$ nazývané cena hrany h nebo také ohodnocení hrany h . Hranově ohodnocený graf je tedy reprezentován uspořádanou trojicí $G = (V, H, c)$, kde V je množina vrcholů, H množina hran a $c: H \rightarrow \mathbb{R}$ je reálná funkce definovaná na množině H .

Definice 2.7 Vrcholově ohodnocený graf (digraf)

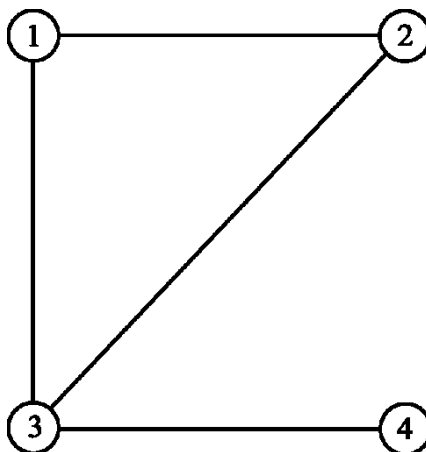
Vrcholově ohodnocený graf $G = (V, H)$, resp. digraf $\vec{G} = (V, H)$, je reprezentován uspořádanou trojicí $G = (V, H, d)$, kde V je množina vrcholů, H množina hran a $d: V \rightarrow \mathbb{R}$ je reálná funkce definovaná na množině V . Číslo $d(v)$ je pak ohodnocením vrcholu v , nebo také cenou vrcholu v .

2.2 Reprezentace grafů

Pro efektivní práci s grafy je důležité vybrat vhodný způsob reprezentace grafu, přičemž grafy lze reprezentovat vícero způsoby. Některé způsoby jsou vhodné pro vizuální názornost, jiné pak pro efektivní zápis s následným počítačovým zpracováním a výpočetními úkony. Jednotlivé způsoby reprezentace grafů budou nyní blíže představeny.

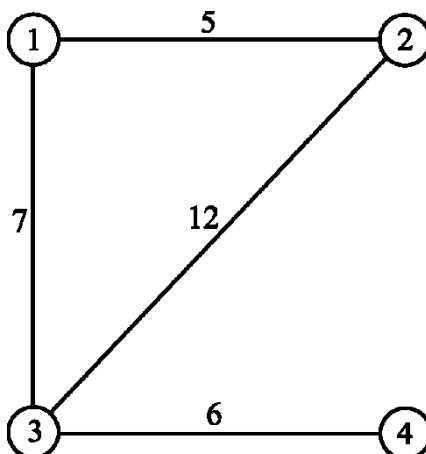
2.2.1 Diagram grafu

Prvním ze způsobů reprezentace grafu, je diagram grafu, resp. digrafu, a jedná se o grafický způsob zachycení struktury tvořený množinou vrcholů a množinou hran. Na obrázcích č. 2.1 až č. 2.4 jsou zachyceny příklady reprezentace grafů, prostřednictvím jejich diagramů.



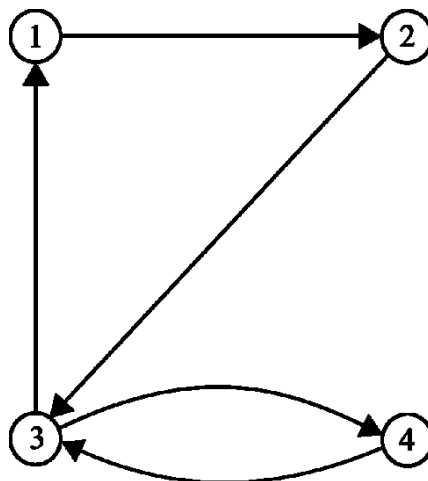
Obr. 2.1: Diagram grafu $G_1 = (V_1, H_1)$

Na obrázku č. 2.1 je zachycen diagram jednoduchého grafu, který se sestává ze čtyř vrcholů a čtyř hran.



Obr. 2.2: Diagram hranově ohodnoceného grafu $G_2 = (V_2, H_2, c_2)$

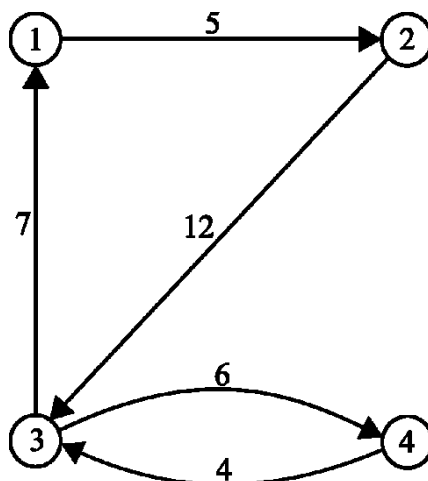
Na následujícím obrázku č. 2.2 je zachycen hranově ohodnocený graf.



Obr. 2.3: Diagram digrafu $\overrightarrow{\mathcal{G}}_3 = (r_3, H_3)$

Obrázek č. 2.3 zachycuje diagram digrafu.

Poslední obrázek č. 2.4, pro reprezentaci digrafu, zachycuje diagram hranově ohodnoceného digrafu.



Obr. 2.4: Diagram hranově ohodnoceného digrafu $\overrightarrow{\mathcal{G}}_4 = (r_4, H_4, c_4)$

Výše uvedené obrázky zachycují základní způsoby reprezentace grafů a digrafů. V následujících částech této kapitoly, týkajících se výpočtů a práce s grafy, bude právě na tyto obrázky odkazováno.

2.2.2 Množinový zápis grafu

Dalším z možných způsobů reprezentace grafu je množinový zápis. Tento zápis je velmi vhodný jako efektivní struktura pro počítačové zpracování. Graf $G_1 = (V_1, H_1)$ je jednoznačně určen množinami V_1 a H_1 , kde $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$

a $H_1 = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$. Podobně lze množinovým zápisem jednoznačně definovat digraf $\overrightarrow{G}_3 = (V_3, H_3)$, který je určen množinami V_3 a H_3 , kde jsou množiny zapsány ve tvaru $V_3 = \{1,2,3,4\}$ a $H_3 = \{(1,2), (2,3), (3,1), (3,4), (4,3)\}$.

2.2.3 Matice přilehlosti

Grafy a digrafy je rovněž možné zachytit prostřednictvím tabulkového zápisu. První z tabulkového zápisu je matice přilehlosti. Maticí přilehlosti je označována čtvercová matice typu $n \times n$, kde $n = |V|$ je počet vrcholů grafu, resp. digrafu. Matice je označována jako $M = (m_{ij})$ a její prvky jsou definovány

- pro případ grafu:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \{i, j\} \in H \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (2.1)$$

- pro případ digrafu:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (i, j) \in H \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (2.2)$$

V níže uvedených tabulkách č. 2.1 a č. 2.2 jsou zachyceny příklady matice přilehlostí grafu a digrafu.

	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	0
3	1	1	0	1
4	0	0	1	0

Tab. 2.1: Matice přilehlosti grafu G_1

Tabulka č. 2.1 zachycuje matici přilehlosti grafu G_1 a koresponduje s diagramem grafu na obrázku č. 2.1.

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	1
4	0	0	1	0

Tab. 2.2: Matice přilehlosti digrafu $\overrightarrow{\cup_3}$

Tabulka č. 2.2 zachycuje matici přilehlostí digrafu $\overrightarrow{\cup_3}$ a stejně jako v předchozím případě koresponduje s výše zachyceným diagramem digrafu na obrázku č. 2.3.

Z tabulky č. 2.1 vyplývá že matice přilehlosti grafu je vždy symetrický podle hlavní diagonály, matice digrafu však nemusí být vždy symetrická, jak je možné vidět v tabulce č. 2.2.

2.2.4 Matice ohodnocení hran

U hranově ohodnocených grafů a digrafů je možné zapsat matici M ohodnocení hran grafu. Matice je stejně jako v předchozím případě typu $n \times n$, kde $n = |V|$ je počet vrcholů grafu, resp. digrafu a prvky v ní jsou definovány

- pro případ grafu:

$$m_{ij} = \begin{cases} c(\{i, j\}) & \text{pokud } \{i, j\} \in H \\ \infty & \text{jinak,} \end{cases} \quad (2.3)$$

- pro případ digrafu:

$$m_{ij} = \begin{cases} c((i, j)) & \text{pokud } \{i, j\} \in H \\ \infty & \text{jinak.} \end{cases} \quad (2.4)$$

V tabulkách č. 2.3 a č. 2.4 jsou zachyceny příklady matice ohodnocení hran pro graf a digraf.

	1	2	3	4
1	∞	5	7	∞
2	5	∞	12	∞
3	7	12	∞	6
4	∞	∞	6	∞

Tab. 2.3: Matice ohodnocení hran grafu G_2

Tabulka č. 2.3 zachycuje matici ohodnocení hran grafu G_2 a koresponduje s grafem reprezentovaným diagramem na obrázku č. 2.2.

	1	2	3	4
1	∞	5	∞	∞
2	∞	∞	12	∞
3	7	∞	∞	6
4	∞	∞	4	∞

Tab. 2.4: Matice ohodnocení hran digrafu \overrightarrow{G}_4

Tabulka č. 2.4 zachycuje matici ohodnocení hran digrafu \overrightarrow{G}_4 a koresponduje s grafem reprezentovaným diagramem na obrázku č. 2.4.

Stejně jako v předešlém případě je matice ohodnocení hran grafu symetrická podle hlavní diagonály. Matice ohodnocení hran digrafu zpravidla symetrická nebývá. Hlavním významem matice přilehlosti a ohodnocení hran je zaznamenání existence, resp. neexistence cesty mezi dvěma vrcholy.

2.3 Cesty v grafech

Při abstrahování reálného problému je často dána reálná dopravní síť reprezentovaná grafem. Jednou z důležitých skutečností, kterou je v této souvislosti nutné zohlednit je, jak

modelovat pohyb dopravního prostředku po dopravní síti. K definování tohoto problému zavádí teorie grafů pojem cestování v grafech. Základní pojmy, které se k cestování v grafech vážou budou nyní představeny.

2.3.1 Základní pojmy pro cesty v grafech

Mezi základní stavební pojmy patří sled, tah a cesta a budou nyní představeny.

Definice 2.8 Sled

Sled v grafu $G = (V, H)$ je libovolná střídavá posloupnost vrcholů a hran, ve tvaru

$$\mu(v_1, v_k) = (v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \{v_2, v_3\}, v_3, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}, v_k). \quad (2.5)$$

Definice 2.9 Tah

Tah v grafu G je takový sled v grafu G , ve kterém se neopakuje žádná hrana.

Definice 2.10 Cesta

Cesta v grafu G je takový sled v grafu G , ve kterém se neopakuje žádný vrchol.

Trojici základních stavebních pojmů pro cestování v grafech lze modifikovat pro digrafy následovně.

Orientovaný sled

Orientovaný sled v digrafu $\vec{G} = (V, H)$, je libovolná střídavá posloupnost vrcholů a hran ve tvaru

$$\mu(v_1, v_k) = (v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), v_3, \dots, (v_{k-1}, v_k), v_k). \quad (2.6)$$

Orientovaný tah

Orientovaný tah v digrafu $\vec{G} = (V, H)$, je orientovaný sled, ve kterém se neopakuje žádná hrana.

Orientovaná cesta

Orientovaná cesta v digrafu \vec{G} je takový orientovaný sled, ve kterém se neopakuje žádný vrchol.

V reálných dopravních sítích je nutné uvažovat s jednosměrnými pozemními komunikacemi, které mohou být obslužným vozidlem pojížděny pouze v příslušném směru. Tato skutečnost je v teorii grafů reprezentována orientovanými hranami.

Aby bylo možné v grafech a digrafech vyhledávat tahy, které korespondují s těmito omezeními, je nutné respektovat souvislosti grafů a digrafů, které budou nyní představeny.

2.3.2 Souvislost grafů a digrafů

V prvé řadě bude pozornost věnována souvislosti grafů, které orientované hrany neobsahují.

Definice 2.11 Souvislý graf

Graf $G = (V, H)$ považujeme za souvislý, pokud pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V$ existuje $u - v$ cesta. V opačném případě je graf G nesouvislý.

Nyní bude pozornost přesunuta k souvislosti digrafů. U digrafů lze rozlišit tři druhy souvislostí. Jedná se o neorientovanou souvislost, orientovanou souvislost a silnou souvislost. Jednotlivé druhy souvislosti budou nyní blíže představeny.

Definice 2.12 Neorientovaně souvislý digraf

Digraf $\overleftrightarrow{G} = (V, H)$ je neorientovaně⁵ souvislý, pokud je souvislý bez ohledu na orientaci hran.

Definice 2.13 Orientovaně souvislý digraf

Digraf \overrightarrow{G} je orientovaně⁶ souvislý, pokud pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V$ existuje v digrafu \overrightarrow{G} $u - v$ sled nebo $v - u$ sled.

Definice 2.14 Silně souvislý digraf

Digraf \overrightarrow{G} je silně souvislý, pokud pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V$ existuje orientovaný $u - v$ sled i orientovaný $v - u$ sled.

⁵ Někdy také označován termínem slabě souvislý.

⁶ Někdy se používá také termín jednostranně souvislý.

2.3.3 Výpočet vzdáleností v dopravní síti

Při optimalizačních výpočtech zaměřených na obsluhu dopravní sítě je zohledňována celá řada kritérií. Jedním z těchto kritérií je vzdálenost, kterou je cíleno minimalizovat. K tomu, aby bylo možné se vzdáleností při optimalizačních výpočtech pracovat, je nutné představit několik skutečností, které se vzdáleností v dopravních sítích bezprostředně souvisí.

Definice 2.15 Vzdálenost v grafu (digrafu)

Vzdálenost mezi dvěma vrcholy $u, v \in V$ v hranově ohodnoceném grafu $G = (V, H, c)$, resp. hranově ohodnoceném digrafu $\vec{G} = (V, H, c)$ je $u-v$ cesta, resp. orientovaná $u-v$ cesta $\mu(u, v)$ s minimální délkou.

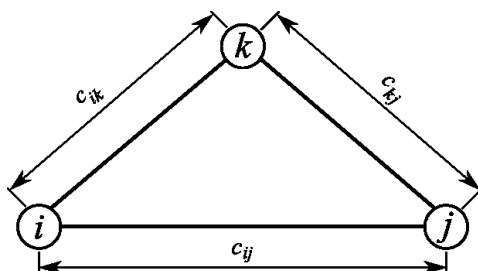
Platí, že délka $d(\mu(u, v))$ cesty $\mu(u, v)$ je dána součtem ohodnocení hran ležících na této cestě. Tedy:

$$d(\mu(u, v)) = \sum_{h \in \mu(u, v)} c(h) \quad (2.7)$$

Vzhledem ke skutečnosti, že při optimalizačních výpočtech je pracováno s množinou vrcholů, je užitečné používat matici, která obsahuje informace o vzdálenosti mezi jednotlivými vrcholy navzájem. Tato matice je nazývána matice vzdáleností.

Pro výpočet matice vzdáleností je možné využít celou škálu algoritmů. V následujícím textu bude představen jeden ze základních, a to sice Floydův algoritmus, který je určen pro výpočet matice vzdáleností v hranově ohodnocených grafech a digrafech $G = (V, H, c)$ a $\vec{G} = (V, H, c)$, kde $c(h) \geq 0$.

Základ algoritmu spočívá v postupném srovnávání hodnot přímých a nepřímých vzdáleností mezi dvojicemi vrcholů $u, v \in V$. Situace je schematicky zakreslena na obrázku č. 2.5.



Obr. 2.5: Zachycení přímé a nepřímé vzdálenosti mezi vrcholy i a j

Princip algoritmu lze shrnout do dvou kroků.

- 1) Sestavení matice $C = (c_{ij})$, jejíž prvky jsou definovány:

$$c_{ii} = 0 \text{ pro } i \in V,$$

$$c_{ij} = \begin{cases} c(i, j), & \text{pokud } (i, j) \in H \\ \infty, & \text{pokud } (i, j) \notin H \end{cases} \quad \text{pro } i, j \in V \wedge i \neq j$$

- 2) Přepočtení matice vzdáleností pro $k = 1, \dots, |V|$ tak, že:

$$c_{ij} := c_{ik} + c_{kj}, \text{ pokud } c_{ij} > c_{ik} + c_{kj}$$

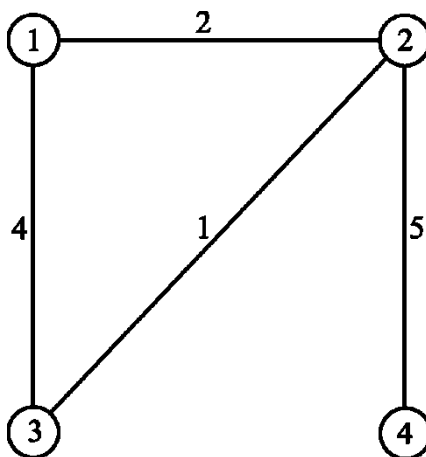
$$\text{pro } i, k \in V \wedge c_{ik} \neq \infty \text{ a pro } j, k \in V \wedge c_{kj} \neq \infty.$$

(Palúch, 2008)

Výpočet matice vzdáleností s využitím Floydova algoritmu bude nyní představen na příkladu č. 2.1.

Příklad 2.1 Je zadán graf $G = (V, H, c)$ pro který je potřeba vypočítat matici vzdáleností.

Diagram grafu G je zachycen na obrázku č. 2.6.



Obr. 2.6: Hranově ohodnocený graf G

Řešení příkladu bude provedeno v následujících tabulkách č. 2.5 – č. 2.9.:

	1	2	3	4
1	0	2	4	∞
2	2	0	1	5
3	4	1	0	∞
4	∞	5	∞	0

Tab. 2.5: Matice ohodnocení hran pro příklad č. 2.1

Tabulka č. 2.5 zachycuje výchozí matici pro příklad č. 2.1. Nyní na ni bude aplikován Floydův algoritmus.

1. Krok (k=1)

V prvním kroku budou do tabulky č. 2.6 opsány první řádek a první sloupec z tabulky č. 2.5. Následně budou do tabulky č. 2.6 opsány z tabulky č. 2.5 všechny hodnoty c_{ij} , pro které platí, že $c_{ik} = \infty$ a $c_{kj} = \infty$, kde $k=1$ a dále také všechny hodnoty v řádku a sloupci obsahujícím nekonečno. Jedná se o hodnoty c_{24} , c_{42} , c_{34} , c_{43} . Zbývající hodnoty c_{23} a c_{32} budou dopočteny následujícím způsobem:

$$c_{23} = \min\{c_{23}; c_{21} + c_{13}\} = \min\{1; 2 + 4\} = 1$$

$$c_{32} = \min\{c_{32}; c_{31} + c_{12}\} = \min\{1; 4 + 2\} = 1$$

	1	2	3	4
1	0	2	4	∞
2	2	0	1	5
3	4	1	0	∞
4	∞	5	∞	0

Tab. 2.6: Hodnoty vypočtené v kroku pro k=1

2. Krok (k=2)

Ve druhém kroku budou do tabulky č. 2.7 opsán druhý řádek a druhý sloupec z tabulky č. 2.6. Ve druhém řádku a druhém sloupci se nenacházejí žádné hodnoty odpovídající nekonečnu, které by bylo možné opsat. To znamená že zbylé hodnoty c_{13} , c_{31} , c_{14} , c_{41} , c_{34} , c_{43} budou dopočteny:

$$c_{13} = \min \{c_{13}; c_{12} + c_{23}\} = \min \{4; 2 + 1\} = 3$$

$$c_{31} = \min \{c_{31}; c_{32} + c_{21}\} = \min \{4; 1 + 2\} = 3$$

$$c_{14} = \min \{c_{14}; c_{12} + c_{24}\} = \min \{\infty; 2 + 5\} = 7$$

$$c_{41} = \min \{c_{41}; c_{42} + c_{21}\} = \min \{\infty; 5 + 2\} = 7$$

$$c_{34} = \min \{c_{34}; c_{32} + c_{24}\} = \min \{\infty; 1 + 5\} = 6$$

$$c_{43} = \min \{c_{43}; c_{42} + c_{23}\} = \min \{\infty; 5 + 1\} = 6$$

	1	2	3	4
1	0	2	3	7
2	2	0	1	5
3	3	1	0	6
4	7	5	6	0

Tab. 2.7: Hodnoty vypočtené v kroku pro k=2

3. Krok (k=3)

Ve třetím kroku bude postupováno stejně jako v předešlých krocích. Do tabulky č. 2.8 je opsán třetí řádek a třetí sloupec z tabulky č. 2.7. Hodnoty c_{12} , c_{21} , c_{14} , c_{41} , c_{24} , c_{42} budou opět dopočítány obdobným způsobem:

$$c_{12} = \min \{c_{12}; c_{13} + c_{32}\} = \min \{2; 3 + 1\} = 2$$

$$c_{21} = \min \{c_{21}; c_{23} + c_{31}\} = \min \{2; 1 + 3\} = 2$$

$$c_{14} = \min \{c_{14}; c_{13} + c_{34}\} = \min \{7; 3 + 6\} = 7$$

$$c_{41} = \min \{c_{41}; c_{43} + c_{31}\} = \min \{7; 6 + 3\} = 7$$

$$c_{24} = \min \{c_{24}; c_{23} + c_{34}\} = \min \{5; 1 + 6\} = 5$$

$$c_{42} = \min \{c_{42}; c_{43} + c_{32}\} = \min \{5; 6 + 1\} = 5$$

	1	2	3	4
1	0	2	3	7
2	2	0	1	5
3	3	1	0	6
4	7	5	6	0

Tab. 2.8: Hodnoty vypočtené v kroku pro k=3

4. Krok (k=4)

Ve čtvrtém a posledním kroku bude získána matice vzdáleností pro příklad č. 2.1. Do tabulky č. 2.9 je opsán čtvrtý řádek a čtvrtý sloupec z tabulky č. 2.8. Vypočteny budou hodnoty c_{12} ,

c_{21} , c_{13} , c_{31} , c_{23} a c_{32} ∴

$$c_{12} = \min \{c_{12}; c_{14} + c_{42}\} = \min \{2; 7 + 5\} = 2$$

$$c_{21} = \min \{c_{21}; c_{24} + c_{41}\} = \min \{2; 5 + 7\} = 2$$

$$c_{13} = \min \{c_{13}; c_{14} + c_{43}\} = \min \{3; 7 + 6\} = 3$$

$$c_{31} = \min \{c_{31}; c_{34} + c_{41}\} = \min \{3; 6 + 7\} = 3$$

$$c_{23} = \min \{c_{23}; c_{24} + c_{43}\} = \min \{1; 5 + 6\} = 1$$

$$c_{32} = \min \{c_{32}; c_{34} + c_{42}\} = \min \{1; 6 + 5\} = 1$$

	1	2	3	4
1	0	2	3	7
2	2	0	1	5
3	3	1	0	6
4	7	5	6	0

Tab. 2.9: Hodnoty vypočtené v kroku pro $k=4$

Vypočtené hodnoty v tabulce č. 2.9 jsou zároveň, jak již bylo zmíněno, výslednou maticí vzdáleností pro zadaný příklad č. 2.1.

■

Ruční výpočet matice vzdálenosti je použitelný výhradně k ilustračním důvodům. Při řešení úloh velkého rozsahu je nutné algoritmus implementovat ve vhodném výpočetním prostředí. Pro výpočty matice vzdáleností ve výpočetní části práce bylo využíváno prostředí Wolfram Mathematica.

V této chvíli byly představeny vybrané pojmy z oblasti teorie grafů, které budou dále v práci využívány. Nyní bude pozornost věnována druhé stěžejní teoretické části, kterou je matematické programování.

3 MATEMATICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

Matematické programování je odvětvím operačního výzkumu, zabývající se řešením optimalizačních úloh. Základem matematického programování je matematický model dané úlohy. V úvodu této kapitoly bude představeno matematické modelování, ze kterého se bude následně vycházet v této práci.

Matematické modelování se obecně zabývá tvorbou matematických modelů a jejich řešením. Metody řešení lze rozdělit na dvě základní kategorie. První kategorii tvoří metody

exaktní⁷, které zaručují nalezení optimálního řešení. Druhou kategorií pak tvoří tzv. heuristické (přibližné) metody, které nalezení optimálního řešení nezaručí. Je však jejich prostřednictvím možné nalézt řešení přípustné.

Matematické modely můžeme klasifikovat podle několika kritérií, přičemž mezi základní patří níže uvedená trojice.

Prvním kritériem je, zdali model obsahuje náhodné proměnné. Pokud náhodné proměnné obsahuje, je označován jako stochastický model. V opačném případě se jedná o determinický model, tzn. model bez náhodných proměnných.

Druhé kritérium rozlišuje, zdali matematického model zohledňuje čas. Statické modely nezahrnují čas, zatím co dynamické modely čas zahrnují a počítají s jeho proměnlivostí.

Třetí kritérium rozděluje matematické modely podle matematického popisu na lineární modely a nelineární modely. U lineárních modelů jsou všechny části modelu vyjádřeny lineárními funkcemi a vychází z nich lineární programování (exaktní metoda), které tvoří podstatnou část řešení zadané optimalizační úlohy, a které bude po sléze blíže představeno. Opakem jsou nelineární modely, tedy modely, jejichž části mohou být tvořeny nelineárními funkcemi (Jablonský, 2007).

3.1 Lineární programování

Předmětem lineárního programování je tvorba a řešení lineárního matematického modelu. Každý lineární model se skládá z účelové funkce a množiny omezujících podmínek. Účelová funkce vyjadřuje optimalizační kritérium, prostřednictvím kterého je posuzována kvalita jednotlivých řešení. Optimalizační kritérium může být například cesta, čas, zisk, vzdálenost apod. Podle daného cíle je pak předmětem optimalizace maximalizace či minimalizace účelové funkce.

Množina omezujících podmínek vymezuje množinu přípustných řešení úlohy a má dvě podmnožiny:

⁷ Z latiny exactus – přesný.

- a) Strukturální podmínky – tyto vyjadřují omezení, která vyplývají ze zadané úlohy.
- b) Obligatorní podmínky – tyto určují definiční obory proměnných vystupujících v matematickém modelu.

Každý lineární model se skládá z konstant a proměnných. Konstanty charakterizují vstupy do úlohy, může se jednat o kapacity zdrojů, matice vzdáleností, cenové matice apod. a proměnné pak modelují jednotlivá rozhodnutí.

Pokud se v matematickém modelu vyskytují pouze celočíselné nebo bivalentní proměnné, jedná se o tzv. *diskrétní lineární programování*. Celočíselná proměnná modeluje rozhodnutí reprezentující například nedělitelnosti požadavku (kusová výroba, počty vozidel apod.). Bivalentní proměnná pak často modeluje rozhodnutí typu ANO/NE.

Pokud jsou v matematickém modelu zastoupeny pouze reálné, nezáporné proměnné, jedná se o tzv. *spojité lineární programování* (Janáček, 2003).

Obecný tvar lineárního programování lze zapsat pomocí sumací ve tvaru:

maximalizovat (minimalizovat)

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3.1)$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \text{ pro } i = 1, \dots, m \quad (3.2)$$

$$x_j \geq 0, \text{ pro } j = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

Optimalizované proměnné x_j představují veličiny, jejichž optimální úroveň je podmínkou dosažení cíle řešení rozhodovací situace. Patří zde například objemy produkce, přepravované množství zboží apod. Ocenění proměnných, označeno jako c_j v účelové funkci představuje ceny výrobku, náklady na jednotku produkce, kvalitativní požadavky na výrobu a další (Gross, 2003).

Parametry modelu a_{ij} bývají zpravidla neměnné při získávání jednotlivých řešení. Může se jednat o měrnou spotřebu materiálových a energetických vstupů, výrobních linek atd.

Omezení b_i mohou být kapacitními limity, vyjádřené např. jako maximální dosažitelný objem produkce nebo využitelný časový fond atd. (Gross, 2003).

V této chvíli byly představeny všechny potřebné teoretické podklady a vysvětleny všechny základní pojmy důležité pro další postup v této práci.

3.2 Výpočetní nástroj

Řešení reálných úloh, nezávisle na jejich velikosti, je možné s pomocí vhodného výpočetního nástroje. Vhodných řešitelských programů je k dispozici celá řada. Pro řešení menších úloh je možné využít například nástroj *Řešitel* v programu MS Excel, který je velmi rozšířený a cenově dostupný ve srovnání s jinými profesionálními programy. Jeho výhoda spočívá v intuitivně navrženém uživatelském prostředí a již zmiňované dostupnosti. Hlavním výpočetním nástrojem, ve kterém byly realizovány všechny výpočetní experimenty je Xpress-IVE.

3.3 Postup při modelování

Při modelování reálné úlohy je potřebné dodržovat určité zásady. V této podkapitole budou stručně představeny důležité body, podle kterých se bude při řešení zadané úlohy postupovat.

1. Sestava verbálního modelu

Na začátku řešení úlohy je nutné slovně popsat reálný systém. Cílem je uvědomit si podstatné prvky systému a vazby mezi nimi.

2. Sestava matematického modelu

Následuje tvorba matematického zápisu, zahrnující všechny prvky modelu a vazby mezi nimi. V této části je určen vhodný výpočetní aparát z oblasti operačního výzkumu (matematické programování, teorie grafů, vícekritériální rozhodování,...)

3. Verifikace modelu

V této části je nutné prozkoumat a ověřit, zda sestavený model skutečně kopíruje realitu. Verifikace je často spojena s pokusnými výpočty, které jsou voleny tak, aby je bylo možné ověřit ručním výpočtem.

4. Validace modelu

V tomto kroku je ověřeno, zda obdržené výsledky odpovídají reálným hodnotám a zda je model použitelný pro reálný experiment.

5. Konečné řešení problému

Tento krok lze označit jako „ostrý výpočet“, neboť v něm probíhá výpočet na reálných datech.

6. Interpretace řešení

Ve finální fázi jsou dosažené výsledky aplikovány v praxi.

V této fázi byl představen postup modelování a v další kapitole následuje jeho aplikace na zadané úloze.

4 TVORBA OPTIMALIZAČNÍHO MODELU

Jak již bylo v úvodu předesláno, předložená práce je věnována optimalizaci tras obslužných vozidel zabezpečujících svoz komunálního odpadu. V předcházejících kapitolách byla podrobně představena teoretická východiska pro řešení této problematiky. V této chvíli bude podrobně formulován problém a následně budou představeny matematické modely, které lze pro řešení využít.

4.1 Formulace problému

Řešená dopravní síť je reprezentovaná hranově ohodnoceným grafem $S(V, H, l)$. Tento graf má tři atributy. $V = 1, \dots, m$ reprezentuje množinu vrcholů, $H = 1, \dots, n$ reprezentuje množinu hran a l označuje ohodnocení hran, kdy l_{ij} je délka hrany $ij \in V$ v kilometrech. Cílem je navrhnout trasu, která zahrnuje každou hranu grafu S alespoň jednou, začíná a končí ve výchozím vrcholu – depu, a má minimální délku.

Pro řešení právě formulované úlohy lze vycházet z teoretického východiska náležejícího do oblasti teorie grafů. Jedná se o „Úlohu čínského listonoše“ v odborné literatuře zvané jako „Chinese Postman Problem“.

Úloha čínského listonoše, kterou zformuloval Mei-Ko Kuan v roce 1962, je založena na nalezení tzv. Eulerova tahu. V této chvíli bude tedy pozornost věnována jeho podrobnému představení. V první řadě bude nutné samotný pojem definovat.

Definice 2.16 Eulerův tah

Uzavřený Eulerův tah v souvislém grafu $G = (V, H)$ existuje právě tehdy, jsou-li všechny vrcholy grafu sudého stupně.

Za předpokladu, že graf splňuje podmínky existence uzavřeného Eulerova tahu, lze tento tah vyhledat s pomocí vhodného algoritmu. Tímto algoritmem může být například Fleuryho algoritmus.

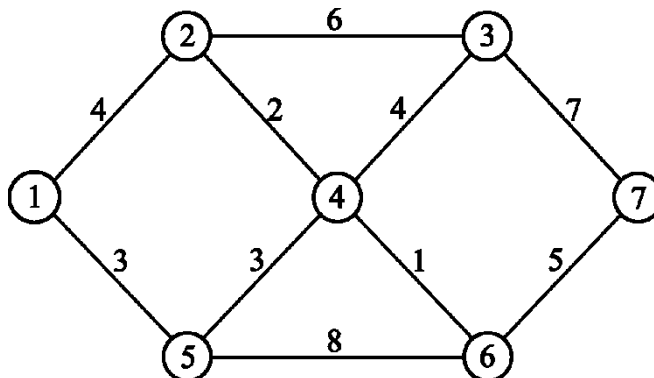
V praxi se však často stává, že reálné dopravní sítě, které jsou následně reprezentovány prostřednictvím grafů nesplňují podmínky existence uzavřeného Eulerova tahu. Za těchto předpokladů je nutné použít náhradního přístupu, prostřednictvím kterého je hledán optimální tah, který obsahuje všechny hrany grafu G alespoň jednou a má minimální délku. Tento optimální tah bude některé hrany grafu obsahovat vícekrát. Tato skutečnost odpovídá nutnosti opakovaného průjezdu některými ulicemi při reálné obslužné činnosti. Cílem je určit hrany pro opakovaný průjezd tak, aby byla minimalizována neproduktivně ujetá vzdálenost.

Náhradních přístupů pro vyhledání uzavřeného tahu v grafech, které nesplňují podmínky existence uzavřeného Eulerova tahu je více. V následujícím textu této práce budou představeny dva.

- a) Edmondsův algoritmus využívající principu minimálního párování.
- b) Přístup využívající matematického modelu pro určení počtu průjezdů jednotlivými hranami.

Oba budou ilustrovány na vzorovém příkladu č. 4.1.

Příklad 4.1 Reálná dopravní síť je reprezentována hranově ohodnoceným grafem $G=(V,H,l)$, jehož diagram je zachycen na obrázku č. 4.1 a matice ohodnocení hran v tabulce č. 4.1.



Obr. 4.1: Hranově ohodnocený graf pro příklad 4.1

V následující tabulce je uvedena výchozí matice ohodnocení hran pro příklad č. 4.1.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	4	∞	∞	3	∞	∞
2	4	0	6	2	∞	∞	∞
3	∞	6	0	4	∞	∞	7
4	∞	2	4	0	3	1	∞
5	3	∞	∞	3	0	8	∞
6	∞	∞	∞	1	8	0	5
7	∞	∞	7	∞	∞	5	0

Tab. 4.1: Výchozí matice ohodnocení hran pro příklad 4.1

Cílem je nalézt cestu obsahující každou hranu grafu alespoň jednou, která začíná a končí ve vrcholu č. 1 a má minimální délku. Nyní budou na příklad postupně aplikovány výše uvedené dva postupy řešení.

Postup řešení s využitím Edmondsova algoritmu

V první řadě je nutné zjistit, zda graf obsahuje uzavřený Eulerův tah. Z tabulky č 4.2, která obsahuje stupně jednotlivých vrcholů je zřejmé, že graf z příkladu č. 4.1 neobsahuje uzavřený Eulerův tah.

Vrchol v_i	Stupeň vrcholu $\deg v_i$	Sudý / lichý
1	2	Sudý
2	3	Lichý
3	3	Lichý
4	4	Sudý
5	3	Lichý
6	3	Lichý
7	2	Sudý

Tab. 4.2: Stupně vrcholů pro výchozí graf k příkladu 4.1

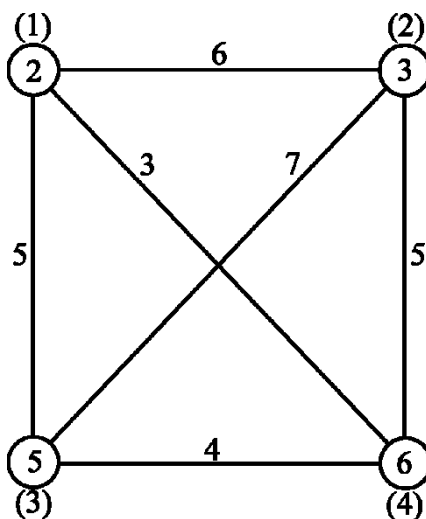
Pro vyhledání trasy je tedy nutné použít náhradní přístup. Nejprve bude představen Edmondsův algoritmus využívající principu tzv. minimálního párování.

Edmondsův algoritmus

V grafu G je potřeba nalézt všechny vrcholy lichého stupně, kterých je sudý počet⁸. Jedná se o vrcholy č. 2, 3, 5 a 6. Z těchto vrcholů je nutné sestavit úplný graf G_1 , kde ohodnocení hran představuje vzdálenost (délka minimální cesty) mezi danými vrcholy ve výchozím grafu G .

⁸ Princip sudosti: Součet stupňů všech vrcholů v grafu $G = (V, H)$ se rovná dvojnásobku počtu hran grafu G , tj. $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |H|$ (Palúch, 2008).

K výpočtu matice vzdáleností je opět možné použít vhodný algoritmus, tedy například Floydův algoritmus, který již byl výše podrobně představen. Diagram úplného grafu G_1 je zachycen na obrázku č. 4.2. Matice vzdáleností d_{ij} je pak uvedena v tabulce č. 4.3.



Obr. 4.2: Diagram úplného grafu G_1

Zde je vhodné doplnit, že pro potřeby dalšího výpočtu je dobré vrcholy přechíslovat. Přechíslování vrcholů je v obrázku č. 4.2 a v tabulce č. 4.3 označeno novým číslem v závorkách.

	2 (1)	3 (2)	5 (3)	6 (4)
2 (1)	999	6	5	3
3 (2)	6	999	7	5
5 (3)	5	7	999	4
6 (4)	3	5	4	999

Tab. 4.3: Matice vzdáleností d_{ij} se zavedením prohibitivních konstant

V této chvíli je možné představit matematický model, prostřednictvím kterého bude zjištěno, které hrany budou ve výsledné trase zařazeny opakovaně. Jedná se o matematický model minimálního párování. Tento matematický model založený na tzv. přiřazovacím problému má tvar:

$$\text{Min } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m d_{ij} \cdot x_{ij} \quad (4.1)$$

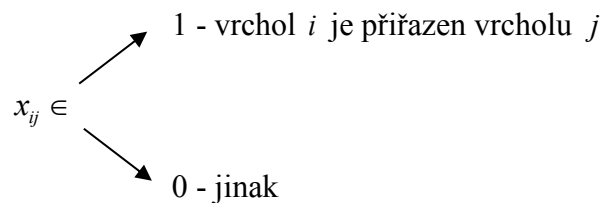
$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \text{ pro } j = 1, \dots, m \quad (4.2)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \text{ pro } i = 1, \dots, m \quad (4.3)$$

$$x_{ij} = x_{ji}, \text{ pro } i, j = 1, \dots, m \quad (4.4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \text{ pro } i, j = 1, \dots, m \quad (4.5)$$

Veličina x_{ij} je bivalentní proměnná, která modeluje přiřazení, resp. nepřičazení vrcholu i k vrcholu j .



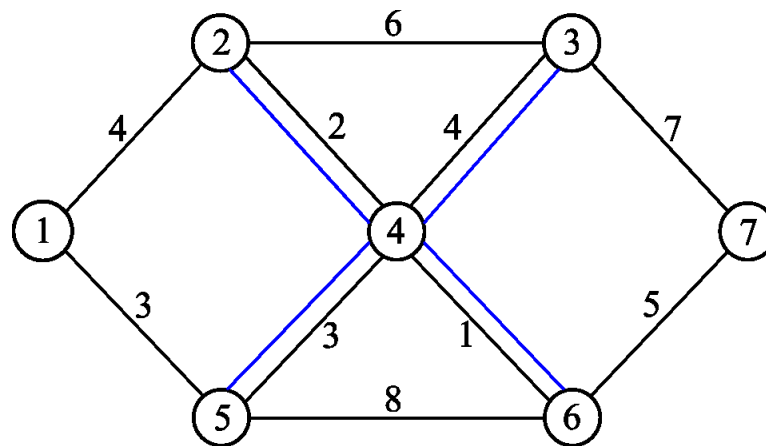
Matice vzdáleností d_{ij} musí obsahovat na hlavní diagonále prohibitivní konstanty (v tomto příkladu je popsána prohibitivní konstanta číslem 999). Tím je zajištěno že nedojde k vytvoření smyček. Neproduktivně ujetá vzdálenost mezi vrcholy ij v zadané síti je vyjádřena pomocí účelové funkce (4.1). Podmínky (4.2) zajišťují, že každý vrchol i bude přiřazen právě jednomu vrcholu j . Podmínky (4.3) zajišťují, že každý vrchol j bude přiřazen právě jednomu vrcholu i . Podmínky (4.4) zajišťují, že pokud bude vrcholu i přiřazen vrchol j pak musí být vrcholu j přiřazen vrchol i . Tato podmínka ovšem způsobí, že výsledná ujetá vzdálenost je dvojnásobná, a proto je před účelovou funkcí přiřazena konstanta $\frac{1}{2}$. Podmínky (4.5) jsou obligatorní podmínky a zajišťují, že proměnné x_{ij} mohou nabývat pouze hodnot z intervalu $\{0, 1\}$ (Janáček 2002).

Výše uvedený matematický model (4.1) - (4.5) lze implementovat jak v prostředí programu Xpress-IVE, tak pro úlohy menších rozměrů například i v prostředí MS Excel - Řešitel.

Výstupem z matematického modelu (4.1) - (4.5) je identifikace hran, které budou ve výsledné trase zařazeny opakovaně. Jedná se o hrany: $\{(1);(4)\}$ a $\{(2);(3)\}$, které

po zpětném přechíslení odpovídají hranám $\{2;6\}$ a $\{3;5\}$. Délka neproduktivně ujeté vzdálenosti činí 10 km.

V této chvíli je nutné právě identifikované hrany $\{2;6\}$ a $\{3;5\}$ zavést do výchozího grafu G , čímž vznikne tzv. multigraf. Situace je zachycena na obrázku č. 4.3.



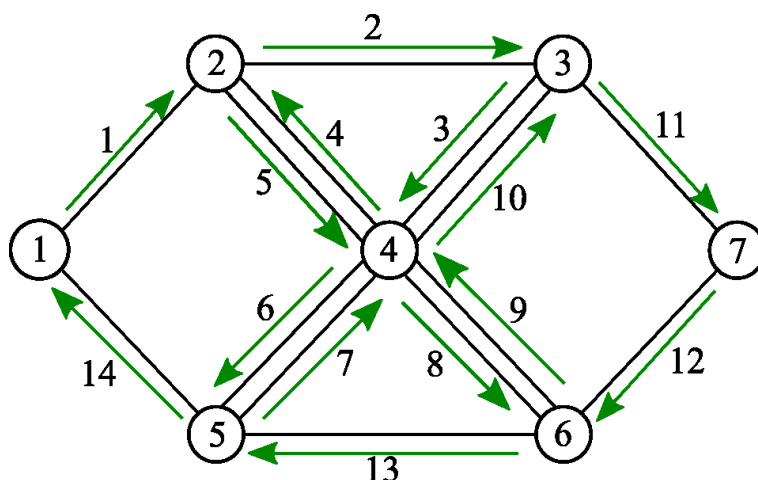
Obr. 4.3:Doplnění hran do grafu G

Na obrázku jsou nově přidané hrany odlišeny modrou barvou. Doplnění hran do grafu G došlo k pozměnění stupňů dotčených vrcholů a je možné snadno ověřit, že všechny vrcholy jsou sudého stupně, což dokládá tabulka č. 4.4, která je uvedena níže.

Vrchol v_i	Stupeň vrcholu $\deg v_i$	Sudý / lichý
1	2	Sudý
2	4	Sudý
3	4	Sudý
4	8	Sudý
5	4	Sudý
6	4	Sudý
7	2	Sudý

Tab. 4.4: Stupně vrcholů po doplnění nových hran

Nyní je možné, aby byl vyhledán optimální tah. Řešení odpovídající posloupnosti vrcholů je zachyceno na obrázku č. 4.4.



Obr. 4.4: Výsledný tah v grafu G , pro postup řešení Edmondsovým algoritmem

Celková ujetá vzdálenost v tomto příkladu činí 53 km, přičemž z této délky je neproduktivně ujeté 10 km.

■

Postup řešení - varianta využívající matematického modelu pro určení počtu průjezdů jednotlivými hranami

Tento postup je založen na matematickém modelu, prostřednictvím kterého bude zjištěno, kolikrát bude použita každá hrana. Při využití tohoto přístupu není nutné vytvářet náhradní síť, jak tomu bylo v předchozím případě. Vstupní data odpovídají matici vzdáleností l_{ij} , která koresponduje s výchozím grafem G . Jedná se o tzv. řídkou matici, která obsahuje pouze hodnoty odpovídající vrcholům, které jsou spojeny hranou.

Matematický model, prostřednictvím kterého budou určeny počty průjezdů jednotlivými hranami má tvar:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m l_{ij} \cdot z_{ij}, \text{ kde existuje } l_{ij} \quad (4.6)$$

$$z_{ij} + z_{ji} \geq 1 \text{ pro } ij = 1, \dots, m, \text{ kde existuje } l_{ij} \quad (4.7)$$

$$\sum_{j=1}^m z_{ij} = \sum_{j=1}^m z_{ji} \text{ pro } i = 1, \dots, m, \text{ kde existuje } l_{ij} \quad (4.8)$$

$$z_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ pro } i, j = 1, \dots, m, \text{ kde existuje } l_{ij} \quad (4.9)$$

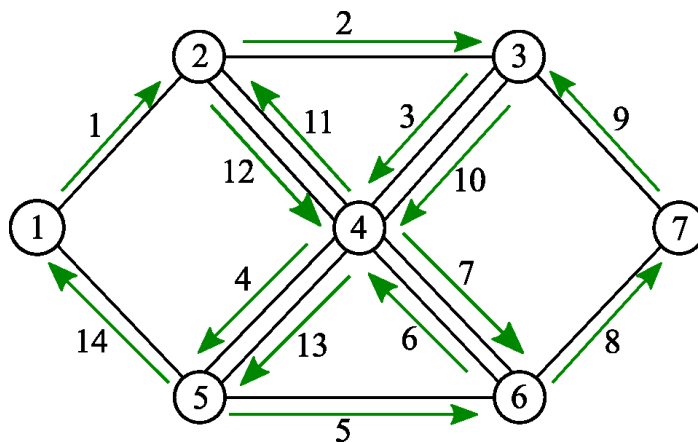
Zápis (4.6) vyjadřuje účelovou funkci, která představuje celkovou vzdálenost, kterou je nutné ujet při hledání optimálního tahu. Odpovídá tedy celkové vzdálenosti, která je při svozu komunálního odpadu ujeta. Celočíselná proměnná z_{ij} představuje počet průjezdu hranou ij . Podmínky (4.7) zajišťují, že každá existující hrana bude ve výsledném tahu zařazena aspoň jednou. Podmínky (4.8) zajišťují, že každý navštívený vrchol bude poté opuštěn. Poslední uvedená obligatorní podmínka (4.9) zajišťuje, že proměnná z_{ij} bude nabývat pouze celých nezáporných čísel (Kozel, Michalcová, Friedrich, 2014).

Výstupy z matematického modelu pro vzorový příklad č. 4.1 jsou shrnuty v tabulce č. 4.5 uvedené níže.

ij	1 2	2 3	2 4	3 4	4 2	4 5	4 6	5 1	5 6	6 4	6 7	7 3
z_{ij}	1	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1

Tab. 4.5: Výstup z matematického modelu pro vzorový příklad č. 4.1

Nyní je již možné vyhledat optimální tah, začínající a končící v depu, který každou z hran obsahuje alespoň jednou a má minimální délku. Výsledné řešení odpovídající posloupnosti vrcholů: 1-2-3-4-5-6-4-6-7-3-4-2-4-5-1 je zachyceno na obrázku č. 4.5. Celková délka trasy činí 53 km, přičemž z této délky je neproduktivně ujeta 10 km.



Obr. 4.5: Výsledný tah v grafu G , pro variantu využívající matematického modelu pro určení počtu průjezdů jednotlivými hranami

■

4.1.1 Jednosměrné pozemní komunikace

Jak již bylo zmíněno, předmětem řešení práce je reálná dopravní síť, reprezentovaná hranově ohodnoceným smíšeným grafem. Tento smíšený graf obsahuje jak neorientované hrany, tak orientované hrany, které v praxi odpovídají jednosměrným pozemním komunikacím. Aby bylo možné vyhledat Eulerův tah, musí tento smíšený graf splňovat podmínku a to sice, že musí být silně souvislý. Tedy, pro každé dva vrcholy i , j lze vyhledat orientovanou cestu z vrcholu i do j a orientovanou cestu z j do i . Tato podmínka se odráží i v praktických podmínkách. Jsou-li v síti zařazeny jednosměrné ulice, pak platí, že každou jednosměrnou ulici lze opustit některou z navazujících ulic. Není předpokládáno s existencí slepých jednosměrných ulic.

Zařazení jednosměrných ulic do matematického modelu

Aby bylo možné zabránit průjezdu orientovanou hranou proti jejímu směru orientace, zavede se do matematického modelu prohibitivní konstanta, pro kterou musí platit, že je větší než součet ohodnocení všech hran v grafu zařazených (Kozel, Michalcová, 2015).

4.2 Verifikace a validace matematických modelů

Tato podkapitola bude vztažena ke klíčovému bodu v procesu řešení problému. Bez správně provedené validace a verifikace matematických modelů není možné použít tyto matematické modely pro řešení reálných problémů. Cíl této kontroly spočívá ve vyřešení množiny netriviálních úloh, na nichž je realizována validace a verifikace a je možné na těchto úlohách ověřit správnost řešení.

Pro účel validace a verifikace matematických modelů bylo vypracováno 10 úloh (každá úloha má dvě varianty), na kterých byla následně ověřena funkčnost matematických modelů. Generování úloh bude nyní krátce vysvětleno.

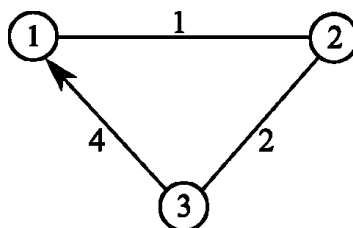
1) Náhodné generování úloh bylo realizováno ve výpočetním prostředí Wolfram Mathematica. Tento program vytvořil v roce 1986 britský fyzik a programátor Stephen Wolfram. Cílem tohoto programu bylo naučit širokou veřejnost efektivně pracovat s výpočetní technikou a tento program měl taktéž pomáhat při výuce matematiky na počítači. Program Mathematica patří svou koncepcí mezi nejvíce univerzální systémy, jelikož obsahuje nástroje pro symbolické i numerické výpočty.

Uživatel zadává příkazy prostřednictvím editoru FRONTEND. V tomto editoru se taktéž zobrazují i veškeré textové a grafické výstupy. Vlastní výpočetní systém programu Mathematica se nazývá KERNEL (česky „jádro“) a ten obsahuje velké množství výkonných procedur a nástrojů pro rychlou a přesnou manipulaci s matematickými výrazy. Výhodou programu je jeho vybavení řadou knihoven s předdefinovanými procedurami pro výpočty z různých oblastí (statistika, finanční výpočty,...), tyto oblasti rozšiřují využitelnost programu v mnoha vědních oborech a disciplínách (Friedrich, 2013).

2) Ke každé náhodně vygenerované úloze byla následně vyhotovena matice ohodnocení hran. Ohodnocení hran je z intervalu $c_{ij} \in (0,1]$. Jedná se o vstupní matici, obsahující informace o délce pozemní komunikace mezi lokalitami, které jsou bezprostředně propojeny. Jednotlivé matice byly uloženy ve formátu *.txt* a struktura zápisu má následující tvar:

```
d: [(1 2) 1 (1 3) 999
      (2 1) 1 (2 3) 2
      (3 1) 4 (3 2) 2]
```

V matici *d* se v prvním řádku vyskytuje prohibitivní konstanta rovna číslu 999. Konstanta zavedená do matice řeší problém jednosměrné ulice. Do matice je nutné zvolit prohibitivní konstantu s dostatečně velkou hodnotou, aby nebyla výpočetním program zahrnuta do vypočtené optimální trasy. Takto zapsaná matice odpovídá grafu zachycenému na obrázku č. 4.6.



Obr. 4.6: Diagram grafu odpovídající zápisu v textovém souboru

3) Ke každé úloze byl zároveň vygenerován graf, který byl exportován z prostředí Wolfram Mathematica ve formátu *.svg*. Všechny vstupní podklady k jednotlivým úlohám (matice ohodnocení hran, grafy) jsou uvedeny v příloze na CD, které je součástí této práce. V příloze je k nahlédnutí vytištěn výpočetní experiment NG_1 na který bude v další části práce odkazováno.

Pro každou úlohu je nutné naplánovat trasu obslužného vozidla, která začíná a končí v depu, které je umístěno ve vrcholu č. 1. Každý náhodně vygenerovaný graf, který představuje reálnou dopravní síť je tvořen množinou obsluhovaných hran a množinou doplňkových hran. V grafech jsou doplňkové hrany značeny přerušovanou čarou a obsluhované hrany jsou značeny plnou čarou. Předmětem obsluhy jsou hrany z množiny obsluhovaných hran.

Je vhodné doplnit, že hrany z množiny doplňkových hran je při obsluze možné použít k efektivním průjezdům obslužného vozidla a zkrácení jeho celkové ujeté vzdálenosti. Tato skutečnost však vyžaduje úpravu matematického modelu a není předmětem této práce. Tato varianta řešení je předmětem diplomové práce, která navazuje na předloženou bakalářskou práci a společně jsou začleněny do řešení širšího projektu s názvem „Efektivní přístupy k úsporným a adaptabilním systémům údržby a obsluhy dopravních sítí“, TH02010930.

U každé úlohy jsou řešeny varianty A a B. Předmětem řešení varianty A je obsluha hran z množiny obsluhovaných hran. Předmětem řešení varianty B je obsluha celé sítě, tedy všech hran patřících jak do množiny obsluhovaných hran, tak do množiny doplňkových hran.

Jak již bylo zmíněno dříve, validace a verifikace byla provedena na vybraném vzorku 10 úloh, pro které byly vypočteny vždy dvě varianty a každá z deseti vzorových úloh byla různého rozsahu. Výsledky jsou zaznamenány v tabulce č. 4.6.

Experiment	Počet: vrcholů / hran / orient. hran	Délka sítě	Celková délka trasy	Neproduktivně ujetá vzdálenost	
		[km]	[km]	[km]	[%]
NG_1A	102/104/3	58,5	108,3	49,8	46,0
NG_1B	133/160/8	93,55	124,6	31,1	24,9
NG_2A	121/130/10	68,9	112,3	43,4	38,6
NG_2B	128/166/18	90,4	118,6	28,2	23,8
NG_3A	65/70/5	36,9	58,6	21,7	37,0
NG_3B	72/98/12	47,8	61,4	13,6	22,1
NG_4A	92/99/8	52,4	70,3	17,9	25,5
NG_4B	114/147/15	74,1	94,7	20,6	21,8
NG_5A	82/84/4	43,3	62,1	18,8	30,3
NG_5B	102/126/7	63	83,3	20,3	24,4
NG_6A	85/86/3	47,3	69,6	22,3	32,0
NG_6B	104/131/6	65,9	90,6	24,7	27,3
NG_7A	133/139/7	71,1	112,3	41,2	36,7
NG_7B	185/239/9	120,1	154,6	34,5	22,3
NG_8A	121/123/5	63,7	96,9	33,2	34,3
NG_8B	147/186/8	92,8	120,8	28,0	23,2
NG_9A	118/126/7	62	90,5	28,5	31,5
NG_9B	157/213/10	97,7	120,0	22,8	19,0
NG_10A	114/122/5	59,05	90,4	31,4	34,7
NG_10B	139/186/7	82,07	105,8	23,1	21,8

Tab. 4.6: Výsledné hodnoty výpočetních experimentů

V prvním sloupci tabulky označené jako Experiment, je uvedeno kódové označení výpočetního experimentu. Název každého experimentu je složen ze značky NG, čísla experimentu a varianty A, nebo B. Ve druhém sloupci je uveden poměr vrcholů, hran a orientovaných hran z celkového počtu hran. Délka sítě je dána pro variantu A součtem hran z množiny obsluhovaných hran a pro variantu B je dána součtem hran z množiny obsluhovaných a také doplňkových hran. Celková délka trasy udává ujetou vzdálenost vozidla v kilometrech. V posledním sloupci je uvedena neproduktivně ujetá vzdálenost. Tato neproduktivně ujetá vzdálenost je v tabulce uvedena v kilometrech a také v procentech.

Vypočtené hodnoty zpracované v tabulce byly počítány v prostředí programu Xpress-IVE. Výpočetní čas každého jednotlivého experimentu byl menší než jedna sekunda. Výstupem každého výpočtu byla mimo jiné i posloupnost vrcholů odpovídající optimálnímu řešení. Pro mnou jeden zvolený výpočetní experiment NG_1A pro který je vytištěn graf, který je součástí přílohy, vypadá vypočtená posloupnost vrcholů následovně:

Cesta: [1, 2, 3, 4, 5, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 11, 47, 46, 44, 18, 32, 33, 34, 50, 49, 36, 35, 36, 37, 38, 75, 74, 73, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 84, 88, 89, 90, 89, 93, 89, 88, 99, 96, 94, 96, 99, 98, 97, 98, 99, 88, 103, 102, 100, 101, 100, 102, 103, 104, 105, 106, 105, 104, 103, 88, 84, 83, 82, 81, 80, 79, 73, 74, 75, 38, 37, 70, 64, 63, 62, 60, 61, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 66, 68, 66, 65, 64, 70, 37, 36, 49, 50, 51, 52, 55, 131, 132, 131, 133, 131, 55, 52, 51, 50, 54, 59, 58, 56, 57, 56, 58, 59, 54, 50, 34, 33, 32, 18, 30, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 20, 21, 16, 15, 13, 12, 13, 14, 13, 15, 16, 45, 44, 40, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 109, 110, 111, 110, 114, 115, 116, 117, 118, 117, 119, 123, 124, 125, 124, 123, 126, 127, 126, 123, 119, 128, 119, 117, 116, 115, 114, 110, 109, 6, 4, 3, 2, 1]

Pro výpočetní experiment NG_1B vypadá optimální řešení následovně:

Cesta: [1, 2, 3, 4, 5, 4, 6, 109, 108, 107, 115, 116, 117, 118, 117, 119, 123, 124, 125, 124, 123, 126, 127, 126, 123, 119, 128, 129, 128, 130, 128, 119, 120, 121, 122, 110, 114, 115, 87, 86, 84, 85, 84, 88, 87, 86, 88, 89, 88, 99, 96, 94, 97, 98, 99, 96, 94, 93, 92, 91, 81, 91, 90, 89, 93, 94, 95, 79, 100, 101, 100, 102, 103, 104, 105, 106, 105, 104, 103, 107, 103, 88, 86, 84, 83, 82, 81, 80, 79, 73, 74, 75, 76, 77, 76, 75, 38, 37, 36, 35, 34, 33, 32, 28, 27, 28, 29, 30, 31, 20, 21, 16, 45, 44, 46, 47, 11, 12, 13, 14, 13, 15, 16, 17, 18, 43, 18, 44, 40, 39, 38, 37, 36, 49, 48, 37, 70, 69, 66, 67, 66, 68, 66, 65, 64, 63, 62, 60, 61, 60, 62, 56, 57, 56, 58, 59, 54, 53, 52, 51, 50, 49, 50, 54, 64, 70, 69, 71, 73, 78, 73, 72, 71, 69, 66, 63, 60, 56, 55, 131, 132, 131, 133, 131, 55, 52, 51, 50, 34, 33, 32, 18, 30, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 20, 19, 18, 41, 42, 41, 40, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 109, 110, 111, 110, 112, 113, 112, 4, 3, 130, 3, 2, 1].

Ve výpočetním prostředí programu Xpress-IVE, bylo ověřeno, že na úlohách reálného rozsahu lze nalézt optimální řešení s přijatelnou hodnotou výpočetního času. V následující

části této práce bude pozornost věnována zadaným datům týkající se svozu komunálního odpadu v Olomouci.

5 NUMERICKÉ EXPERIMENTY NA REÁLNÝCH DATECH

V této kapitole bude představena příprava vstupních dat a jejich zpracování. V úvodu kapitoly budou také stručně představeny podmínky, ve kterých probíhá svoz odpadu v rámci města Olomouce.

Svoz komunálního odpadu je jednou z nejdůležitějších a nejrozsáhlejších činností Technických služeb města Olomouce, a.s. Za tímto účelem je využívána nejmodernější technika a vybavení doprovázena řadou speciálních vozidel a kvalitně školených pracovníků. Svoz odpadu především toho směsného, probíhá každý všední den převážně v dopoledních hodinách, včetně většiny státních svátků. Výjimku tvoří pouze Nový rok a Velikonoční pondělí – v tyto dny neprobíhá svoz odpadu.

Svoz tříděného odpadu je zajišťován pro čtyři základní druhy recyklovatelného odpadu, pro které jsou vymezeny samostatné, barevně odlišné, kontejnery a popelnice. Mezi tříděný odpad patří: Papír – modré kontejnery nebo popelnice, Plast – žluté kontejnery nebo popelnice, Sklo – zelené kontejnery nebo popelnice a Nápojové kartony tetrapak – červená popelnice (Technické služby města Olomouce, a.s., 2014).

Pro účely této práce byla vybrána optimalizace tras pro svoz konkrétního druhu tříděného odpadu, a to sice plastu. Předmětem řešení bude jedna trasa obslužného vozidla, které svoz plastu zabezpečuje. Obsluha kontejnerů s plastem v městě Olomouci probíhá ve třech trasách, rozdělených pro tři řidiče obslužných vozidel. Každý z těchto řidičů má k dispozici seznam adres, na kterých se nacházejí kontejnery a popelnice, které musí obsloužit. Trasy řidičů jsou vyhotoveny tak, aby kapacita vozu stačila pro obsluhu celé trasy a nedocházelo k předčasnému naplnění vozu. Cílem úlohy je naplánovat trasu obslužného vozidla, která začíná a končí ve stanovišti č. 1 na adrese Libušina 103, Olomouc. Trasa obsahuje každou ulici alespoň jednou a má minimální délku.

Jak již bylo zmíněno, svoz plastu probíhá ve třech trasách. Vstupní data pro všechny trasy jsou zpracována v programu MS Excel. Vzorová ukázka dat je uvedena v tabulce č. 5.1.

Stanoviště	Poznámka	Četnost	Typ nádoby	Ks
Olomouc, Čadova	x Gorkého	2x7	kont.	1
Olomouc, Chválkovická 3	Elast Active s.r.o.	1x7	PP120	1
Olomouc, Dvorská	x Tyršova	2x7	kont.	2

Tab. 5.1: Ukázka vstupních dat z Olomouce

Tato část textu je věnována popisu veličin z výše uvedené tabulky. Stanoviště je variabilní informace a nejčastěji je definováno poštovní adresou, číslem popisným, popřípadě jen názvem ulice. Dle požadavků zadavatele je brána ulice jako celek. Ve sloupci s názvem Poznámka je uvedena informace pro řidiče. Jedná se například o speciální body sloužící pro lepší orientaci řidiče v určitém místě. Četnost svozu udává kolikrát týdně dochází ke svozu odpadu na dané adrese. Typ nádoby rozlišuje, jaké kontejnery a nádoby na plast se nacházejí na dané adrese, respektive stanovišti. Existuje několik typů kontejnerů. Nádoby na plast jsou rozděleny nejčastěji podle objemu, například typ PP120, uvedený v tabulce č. 5.1, má objem roven 120 litrům. Dále se zde vyskytují nádoby typu PP240, pytle na plast a ostatní kontejnery. Počet kusů informuje o počtu kontejnerů a nádob nacházejících se na daném stanovišti.

5.1 Příprava vstupních dat

Vstupní data bylo nutné zpracovat do tvaru, ve kterém bylo možné provést jejich geokódování. Zpracování dat zahrnovalo odstranění duplicitních adres. Po odstranění duplicitních adres je celá ulice brána jako celek, a nikoliv pouze podle čísla popisného. Součástí přípravy vstupních dat bylo také důležité odstranit drobné textové nepřesnosti v názvech ulic, tak aby korespondovaly s jejich oficiálními názvy.

Stanoviště	Poznámka	Četnost	Typ nádoby	Ks
Olomouc, Jiráskova 7A	Emontas	1x7	PP240	1
Olomouc, Jiráskova 14	VanCo.cz	1x14	PP120	1
Olomouc, Jiráskova 16 a	rest. U Brzusků	výzva	pytle	0
Olomouc, Jiráskova 81/13	Berika s.r.o.	1x7	PP240	1
Olomouc, K Mrazárnám 1158	O2	1x14	kont.	1
Olomouc, Klimeckého 13		2x7	PP240	2

Tab. 5.2: Ukázka dat obsahující duplicitní adresy a čísla popisná

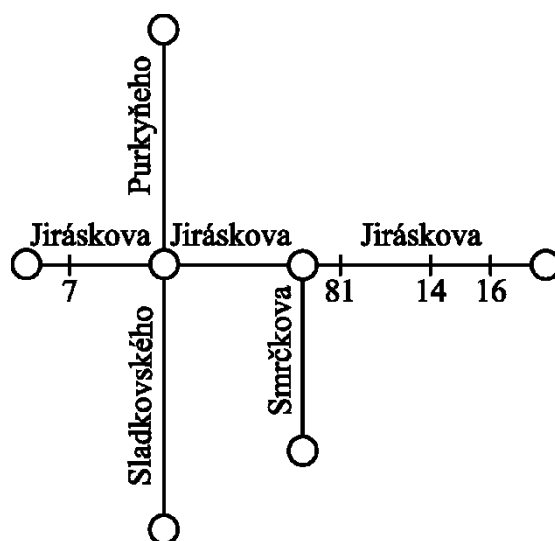
Jak je možné vidět v tabulce č. 5.2 se nachází sedm stanovišť, ale je zde také patrné, že adresa ulice Jiráskova se zde vyskytuje čtyřikrát s různými čísly popisnými. Bylo tedy nutné odstranit všechny duplicitní názvy ulic a následně odstranit čísla popisná pro všechny adresy stanovišť. Po úpravě mají data následující tvar:

Stanoviště
Olomouc, Jiráskova
Olomouc, K Mrazárnám
Olomouc, Klimeckého

Tab. 5.3: Data po odstranění duplicitních adres a čísel popisných z tabulky č. 5.2

Toto zjednodušení, které bylo právě popsáno, bylo přijato na návrh subjektu, který svoz odpadů zabezpečuje a je s ním takto dále pracováno. V této souvislosti je však nutné představit dvě extrémní situace, které mohou být tímto zjednodušením způsobeny.

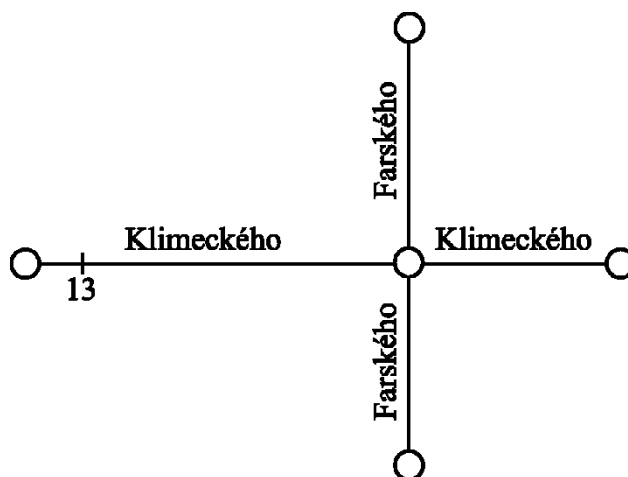
První situace odpovídá skutečnosti, kdy jsou stanoviště, která mají být obsloužena rozložena po celé délce ulice. Tato situaci je zachycena na ilustračním obrázku č. 5.1.



Obr. 5.1: Vzorové schéma ulic pro první situaci

V tomto případě nedojde k výraznému zkreslení výchozí situace, neboť, jak za předpokladu obsluhy čtyř stanovišť situovaných po celé délce ulice, tak při obsluze ulice jako celku bude výsledná ujetá vzdálenost srovnatelná.

Druhá situace odpovídá skutečnosti, kdy je na ulici situováno pouze jedno nebo několik stanovišť tak, že nahrazení těchto stanovišť celou ulicí neodpovídá reálnému způsobu obsluhy. Tato situace je zachycena na ilustračním obrázku č. 5.2.



Obr. 5.2: Vzorové schéma ulic pro druhou situaci

V tomto případě může dojít ke zkreslení výchozí situace, neboť v reálném provozu není nutné projíždět ulicí po celé její délce.

Po těchto úpravách je k dispozici síť ulic, pro kterou je nutné naplánovat trasu obslužného vozidla. Pro realizaci výpočtu je tato uliční síť reprezentována grafem, resp. migrafem, a vstupní data charakterizující matice vzdáleností mezi jednotlivými vrcholy

digrafu byly získány na základě procesu geokódování s využitím nástroje ArcGIS. V rámci procesu geokódování bylo zjištěno, že zadaná síť ulic tvoří silně souvislý graf, ve kterém lze vyhledat uzavřený tah.

5.2 Interpretace a zhodnocení dosažených výsledků

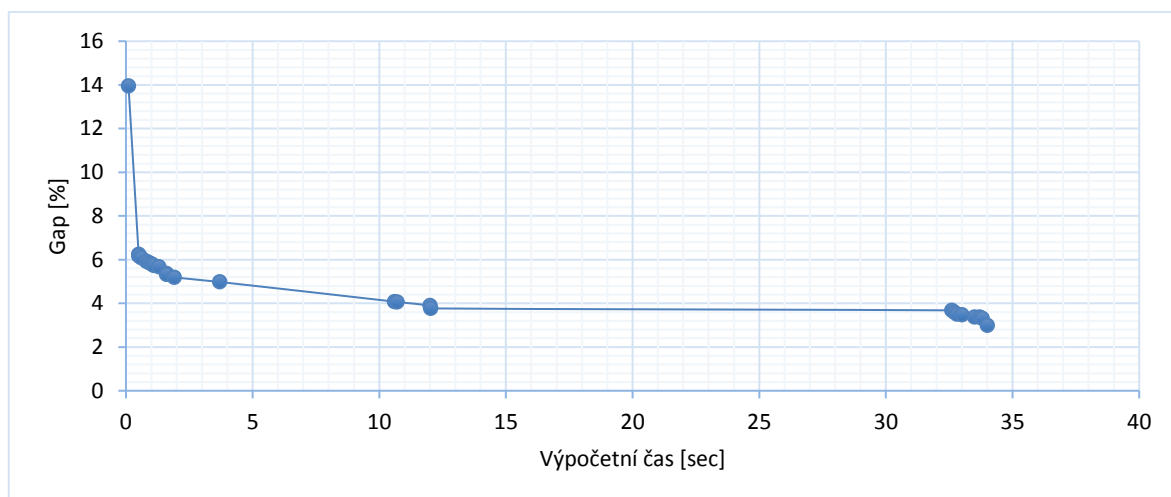
Nyní budou prezentovány výsledky, kterých bylo dosaženo při aplikování matematického modelu (4.6) – (4.9) na vstupní data, týkající se vybrané úlohy z oblasti svozu plastů v podmínkách Technických služeb města Olomouce, a.s. Vstupní data, týkající se vybrané úlohy jsou shrnuty v tabulce č. 5.4.

Experiment	Počet: vrcholů / hran / orient. hran	Délka sítě	Celková délka trasy
		[km]	[km]
Zvolená trasa	1738/2051/231	183,438	282,333

Tab. 5.4: Vstupní data pro reálnou úlohu

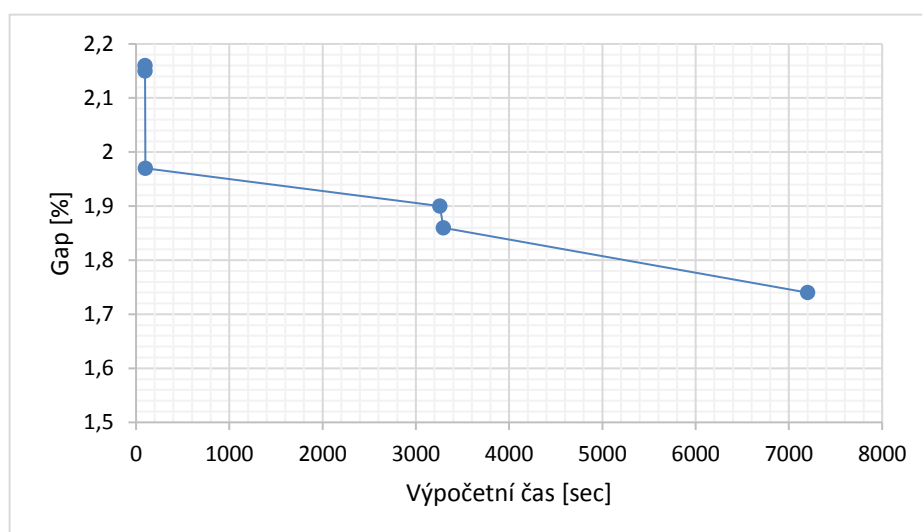
Jak již bylo výše uvedeno, předmětem řešení byla jedna vybraná trasa obslužného vozidla zabezpečujícího svoz plastů. V rámci této trasy je nutné obsloužit 109 ulic, na kterých jsou situovány nádoby určené ke svozu. Těchto 109 ulic je reprezentováno silně souvislým smíšeným grafem, který je tvořen 1738 vrcholy a 2051 hranami, ze kterých je 231 hran orientovaných. Těchto 231 orientovaných hran odpovídá existenci jednosměrných pozemních komunikací. Celková délka uliční sítě, kterou je nutné obsloužit, činí 183,438 km. Ve vrcholu č. 1 je situováno depo společnosti odkud obslužné vozidlo vyjíždí a kde se opět zpátky navrácí. Tento vrchol č. 1 odpovídá adrese Olomouc, Libušina 103.

Při řešení matematického modelu (4.6) – (4.9) realizovaném ve výpočetním prostředí Xpress-IVE bylo obdrženo přípustné řešení s hodnotou účelové funkce 282,333 km při zbývajícím gapu 3%. Jedná se o 3 % od doposud nejlepšího nalezeného řešení. Výpočetní čas tohoto řešení činil 34 sekund. Rychlost konvergence přípustných řešení k optimálnímu řešení (závislost velikosti gapu na hodnotě výpočetního času) je zachycena v grafu na obrázku č. 5.3.



Obr. 5.3: Graf závislosti velikosti gapu na čase

Jak je z grafu na obrázku č. 5.3 možné vidět, přestože se jedná o úlohu reálného rozsahu, hodnota výpočetního času 34 sekund je při respektované nepřesnosti do 3 % zcela akceptovatelná. Body, které jsou v grafu zobrazeny modrou barvou, odpovídají celočíselným přípustným řešením, která byla v daném výpočetním čase, při odpovídající hodnotě gapu získána. Výpočetní čas lze dále prodlužovat a zkoumat případné zlepšení jednotlivých přípustných řešení. Při dostatečně dlouhé době řešení 7200 sekund, bylo obdrženo přípustné řešení s hodnotou účelové funkce 279,138 km a s gapem 1,74 %. Vzhledem ke skutečnosti, že hodnota doposud nejlepšího nalezeného řešení činila 274,275, bylo toto přípustné řešení přijato jako řešení výsledné. V grafu na obrázku č. 5.4 je možné vidět, že s rostoucí hodnotou výpočetního času se rychlost konvergence přípustných řešení k optimálnímu řešení exponenciálně snižuje.



Obr. 5.4: Graf závislosti velikosti gapu po uplynutí 90. sekundy výpočtu

Na základě tohoto získaného řešení lze vypočítat hodnotu neproduktivně ujeté vzdálenosti, která činí 95,7 km, což je 34,28 % z celkové ujeté vzdálenosti. Procentuální vyjádření neproduktivně ujeté vzdálenosti koresponduje s průměrnou hodnotou procentuálního vyjádření neproduktivně ujetých vzdáleností u verifikačních úloh, kde tato hodnota činila 28,86 %.

Posloupnost vrcholů odpovídající výsledné trase je uvedena v příloze na CD. Tato posloupnost je tvořena 3143 vrcholy a začíná a končí ve výchozím vrcholu č. 1. Každému z těchto vrcholů lze přiřadit odpovídající GPS souřadnici a následně vytvořit výstup, který lze spustit v navigačním GPS přístroji.

ZÁVĚR

Cílem mé bakalářské práce bylo navrhnout optimální trasu obslužného vozidla zabezpečujícího svoz komunálního odpadu v městě Olomouci. Předmětem řešení byla konkrétní svozová trasa obsluhující kontejnery a nádoby na plast. Úvodní část práce popisuje teoretické podklady a definuje základní pojmy, potřebné k řešení zadané úlohy. V práci je vycházeno z teoretických poznatků v oblasti teorie grafů a matematického programování.

V navazující výpočetní části práce bylo nutné formulovat zadaný problém nejdříve slovně a následně vytvořit pro zadanou úlohu odpovídající matematický model. Následovalo ověření funkčnosti vytvořených matematických modelů na experimentálních výpočtech. Za tímto účelem jsem zpracoval celkem deset náhodně generovaných grafů, odpovídajících reálným dopravním sítím. Tyto náhodné grafy jsou tvořeny vrcholy reprezentující křižovatky, obslužnými hranami a doplňkovými hranami představující pozemní komunikace, z nichž některé hrany byly orientované a reprezentovaly tak jednosměrné pozemní komunikace. Matematické modely byly vypočteny programem Xpress-IVE.

Po kontrole obdržených výsledků bylo možné provést ostrý výpočet na reálných datech poskytnutých městem Technickými službami města Olomouce, a.s. Reálná data bylo nutné před výpočtem připravit. Tato příprava zahrnovala opravu textových nepřesností v názvech ulic a odstranění duplicitních adres. Takto připravená data byla geokódována a výstupem z geokódování byla uliční síť tvořící souvislý graf, ve kterém je možné vyhledat uzavřený tah.

Po provedení výpočtu na reálných datech bylo zjištěno, že hodnoty neproduktivně ujetých kilometrů ve výpočetních experimentech, korespondují s neproduktivně ujetou vzdáleností na vypočtené trase. Tato neproduktivně ujetá vzdálenost činí v průměru zhruba 30% z celkové délky sítě. Výstupem z matematického modelu je také posloupnost vrcholů, kde každému vrcholu odpovídají souřadnice, které lze zadat do GPS přístroje a vytvořit trasu pro řidiče obslužného vozidla. Obdržené výsledky ovšem zatím není možné porovnat se stávajícím stavem, vzhledem ke skutečnosti zjednodušení reálně obsluhované oblasti, jak bylo podrobně popsáno v podkapitole 5.1.

Podstatným přínosem, kterým je ověření skutečnosti, že popsané teoretické přístupy a konkrétní matematické modely lze úspěšně aplikovat na reálných úlohách velkých rozsahů a je možné dosáhnout přípustných, resp. optimálních řešení v poměrně krátkém čase.

Aby však bylo možné porovnat dosažené výsledky s reálným stavem realizace obsluhy území, je nutné zvolit jiný přístup ve způsobu přípravy vstupních dat, případně využít postup předložený v práci a vstupní data zpřesnit. Těmto nastíněným krokům bych se rád věnoval v rámci své diplomové práce.

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval svému vedoucímu bakalářské práce panu Ing. Mgr. Petru Kozlovi, Ph.D. za rady a připomínky k mé práci. Dále bych rád poděkoval Ing. Lucii Orlíkové, Ph.D., za přípravu vstupních dat v prostředí ArcGIS.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

1. **BONDY, J. A. a U. S. R. MURTY.** *Graph theory*. New York: Springer, c2008. ISBN 978-1-84628-969-9.
2. **COOK, William.** Po stopách obchodního cestujícího: matematika na hranicích možností. Praha: Argo, 2012. Zip (Argo: Dokořán). ISBN 978-80-7363-412-4.
3. **DANĚK, Jan a Dušan TEICHMANN.** *Optimalizace dopravních procesů*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2005. ISBN 80-248-0996-6.
4. **DUDORKIN, Jiří.** *Operační výzkum*. Praha: České vysoké učení technické, 1988.
5. **FRIEDRICH, Václav.** *Mathematica na počítači pro nematematiky*. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2013. ISBN 978-80-248-3162-6.
6. **GROS, Ivan.** *Kvantitativní metody v manažerském rozhodování*. Praha: Grada, 2003. Expert (Grada). ISBN 80-247-0421-8.
7. **JABLONSKÝ, Josef.** *Operační výzkum: kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování*. 3. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-44-3.
8. **JANÁČEK, Jaroslav.** *Matematické programování*. 2., opr. vyd. Žilina: EDIS, 2003. ISBN 80-8070-054-0.
9. **JANÁČEK, Jaroslav.** *Optimalizace na dopravních sítích*. Žilina: Žilinská univerzita, 2002. ISBN 80-8070-031-1.
10. **KOZEL, P., MICHALCOVÁ, Š.** "The use of linear programming in solving service tasks of mixed transport networks", In Proc. of 11th International Conference on Strategic Management and its Support by Information Systems 2015, Uherské Hradiště, pp. 274-279. ISBN 978-80-248-3741-3.
11. **KOZEL, P., MICHALCOVÁ, Š., FRIEDRICH, V.** "The Using of Linear Programming for Solving the Municipal Waste Collection Problem", In Proc. of 32nd International Conference Mathematical Methods in Economics 2014, Olomouc, pp. 483-488. ISBN 978-80-244-4209-9.
12. **PALÚCH, Stanislav.** *Teória grafov*. Žilina: EDIS, 2001. ISBN 80-7100-874-5.

13. **PICKOVER, Clifford A.** Matematická kniha: od Pythagora po 57. dimenzi: 250 milníků v dějinách matematiky. Praha: Argo, 2012. Zip (Argo: Dokořán). ISBN 978-807363-368-4.
14. **SAHA RAY, Santanu.** *Graph theory with algorithms and its applications: in applied science and technology*. New York: Springer, 2013. ISBN 978-81-322-0749-8.
15. **WOLFRAM, Stephen.** *An elementary introduction to the Wolfram language*. Champaign, IL, USA: Wolfram Media, 2015. ISBN 978-1-944183-00-4.
16. XPRESS-Mosel “User guide“ (2005), United Kingdom, Blisworth: Dash Associates.
17. 3.3.4 Odpady | ČSÚ. Český statistický úřad | ČSÚ [online]. Dostupné z: https://www.czso.cz/csu/czso/13-1134-07-2006-3_3_4_odpady_.
18. Historie nakládání s odpady – Recyklace. Recyklace [online]. Dostupné z: <https://recyklace.wordpress.com/2015/08/08/historie-nakladani-s-odpady/>.
19. Úvodní stránka | Technické služby města Olomouce, a.s. Úvodní stránka | Technické služby města Olomouce, a.s. [online]. Copyright © 2014 [cit. 16.05.2018]. Dostupné z: <https://www.tsmo.cz>.

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha č. 1: Výpočetní experiment NG_1

Příloha č. 2: Složka obsahující výpočetní experimenty a jejich zpracování na CD